Marathon d'Orsay de Mathématiques

Solutions de la quatrième vague de mars 2024

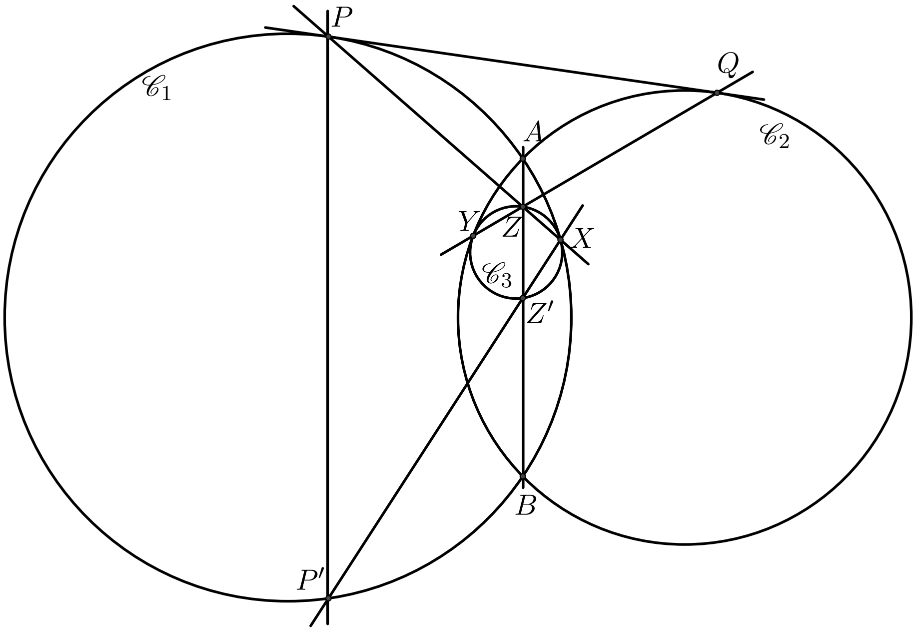
Voici les solutions de la quatrième vague de problèmes, avec les noms des participants qui ont fourni une solution correcte.

Solution du problème 13 : Nous dirons qu'un entier $n \geq 2$ est perdant si un joueur qui a son tour de jouer avec n jetons sur la table va perdre la partie, si les deux adversaires jouent de manière optimale. Et on dira que n est gagnant si dans cette situation le joueur va remporter la partie. Alors 2 est perdant car le joueur est forcé de retirer un unique jeton, laissant donc un seul jeton sur la table. D'autre part, si n est perdant, alors $n+1, \ldots, 2n$ sont gagnants car à partir de ces nombres de jetons il est toujours possible de laisser exactement n jetons à son adversaire. De plus, $2n+1$ est alors perdant, car toute manière de jouer laissera entre $n+1$ et $2n$ jetons sur la table. Ainsi, si n est perdant, le nombre perdant suivant est $2n+1$, et les nombres qui ne sont pas perdants sont gagnants. Montrons par récurrence que la suite des nombres perdants est $3 \times 2^k - 1$ avec $k \geq 0$. Pour $k = 0$, on obtient bien 2. Si $n = 3 \times 2^k - 1$ est perdant, alors le suivant est $2n + 1 = 3 \times 2^{k+1} - 1$ comme souhaité. Vérifions maintenant si 2024 est de la forme $3 \times 2^k - 1$ pour un certain entier positif k. Il faudrait pour cela que $\frac{1}{3}(2024+1) = 675$ soit une puissance de 2, mais ce n'est clairement pas le cas. Donc 2024 est gagnant, de sorte que c'est Hannah, la première personne à jouer, qui va remporter la partie.

Ont fourni une solution correcte :
C. Roux–Bénabou (2nde au Lycée Charlemagne, à Paris),
A.-L. Shen-Nguyen (2nde au Lycée Blaise Pascal, à Orsay),
N. Cosnier (1ère au Lycée Charles Péguy, à Paris),
R. Crovisier (1ère au Lycée Lakanal, à Sceaux),
F. Desodt (1ère au Lycée Sophie Barat, à Châtenay-Malabry),
E. Ray (1ère au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye),
B. Richard (1ère au Lycée Saint Jean Hulst, à Versailles),
M. Rouault (1ère au Lycée Diderot, à Paris),
E. Torres-Gajda (1ère au Lycée Saint Jude, à Armentières),
R. Cruau (Tle au Lycée Le Bon Sauveur, à Le Vésinet),
H. Dargent (Tle au Lycée Félix Faure, à Beauvais),
A. Dusoulier (Tle au Lycée Sophie Barat, à Châtenay-Malabry),
T. Filzi (Tle au Lycée Condorcet, à Paris),
B. Guinard (Tle au Lycée N'R Hatorah, à Paris),
F. Ha (Tle au Lycée Charlemagne, à Paris),
C. Henry (Tle au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau),
G. Hoffmann (Tle au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye),
N. Gonde (L3 Biosciences à l'ENS de Lyon, à Lyon),
S. Gvozdić (L3 magistère de mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
V. Meslon (1ère année à l'ESILV, à Courbevoie),
Y. Wang (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau),
M. Yadollahi (L3 magistère de maths à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
X. Ye (1ère année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
N. Déhais (M1 FES à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),

E. Lubek (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
A. Mazeyrat (2ème année à l'INPGI, à Grenoble),
A. Merceron (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
N. Tardy (M1 Hadamard à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette),
P. Drouvillé (4ème année à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette),
J. Braconnier (professeur de mathématiques au Lycée Félix Faure, à Beauvais),
D. Collignon (chef de département à la délégation interrégionale du secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence),
N. Didrit (Professeur agrégé de Mathématiques au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison),
C. Fischler (enseignante à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
Q. Granier (césure à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),
V. Lefèvre (chargé de recherche Inria au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon),
C. Lemonnier (professeure agrégée au Lycée Marguerite de Navarre, à Alençon),
T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau),
C. Romon (Secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense),
l'équipe formée par P. Codron (1ère à l'Ecole Jeannine Manuel, à Paris) et T. Ravel (1ère à l'Ecole Jeannine Manuel, à Paris),
l'équipe formée par G. Boyer-Chammard (Tle au Lycée Saint-Jean de Passy, à Paris) et G. Courtet (Tle au Lycée Saint-Jean de Passy, à Paris),
l'équipe formée par N. Ismaaili Erny (Tle au Lycée International des Pontonniers, à Strasbourg) et T. Schneider (Tle au Lycée Saint-Jean de Passy, à Paris),
l'équipe formée par T. Babelis (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), M. Komisarova (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et A. Sarocinskis (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
l'équipe formée par J. Clément-Cottuz (M2 Mathématiques appliquées à l'Université Grenoble Alpes, à Grenoble) et L. Vanhaelewyn (M1 Mathématiques à l'ENS, à Paris),
l'équipe formée par F. Arous (L3 Mathématiques Fondamentales et Appliquées à l'Université Paris Cité, à Paris) et T. De Wolf (en échange à l'Université Mohamed VI Polytechnique, à Rabat, 3ème année de BASc Maths à Sciences Po, à Paris et à l'Université Paris Cité, à Paris),
l'équipe formée par M. Baccara (M2 Probabilités et Modèles Aléatoires à Sorbonne Université, à Paris), S. Baumert (M1 de Mathématiques à Sorbonne Université, à Paris) et C. Gassot (professeur agrégé de mathématiques au Lycée Geoffroy-Saint-Hilaire, à Etampes).

Solution du problème 14 : Notons Z' le deuxième point d'intersection de la droite AB et du cercle $\mathscr{C}_3$, et P' le deuxième point d'intersection de la droite XZ' et du cercle $\mathscr{C}_1$. Par le théorème de l'inscrit inscrit appliqué à l'arc joignant P et B sur $\mathscr{C}_1$, on a $\widehat{PAB} = \widehat{PXB}$. D'autre part, les angles $\widehat{PZA}$ et $\widehat{XZB}$ sont égaux car opposés par leur sommet. Par conséquent, les triangles ZPA et ZBX sont semblables, de sorte que $|ZP| \cdot |ZX| = |ZA| \cdot |ZB|$. De même, $|ZQ| \cdot |ZY| = |ZA| \cdot |ZB|$. Les triangles PQZ et XYZ sont donc semblables, et en particulier $\widehat{ZPQ} = \widehat{XYZ}$. Par le théorème de l'angle inscrit appliqué à l'arc joignant X et Z sur $\mathscr{C}_3$, on a $\widehat{XYZ} = \widehat{XZ'Z}$. Comme les cercles $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_1$ sont tangents en X, il existe une homothétie de centre X qui envoie $\mathscr{C}_3$ sur $\mathscr{C}_1$. Celle-ci envoie également Z sur P et Z' sur P', de sorte que ZZ' et PP' sont parallèles, et donc $\widehat{XZ'Z} = \widehat{XP'P}$. Ainsi, on obtient $\widehat{ZPQ} = \widehat{XP'P}$. Par le théorème de l'angle inscrit appliqué à l'arc joignant P et X sur $\mathscr{C}_1$, on en déduit que la droite PQ est tangente à $\mathscr{C}_1$ en P. De même, la droite PQ est tangente à $\mathscr{C}_2$ en Q. Les points P et Q sont donc les points de contact d'une des droites tangentes communes à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, et ne dépendent donc que de ces cercles, et pas de $\mathscr{C}_3$.



Ont fourni une solution correcte :
A.-L. Shen-Nguyen (2nde au Lycée Blaise Pascal, à Orsay),
R. Cruau (Tle au Lycée Le Bon Sauveur, à Le Vésinet),
H. Dargent (Tle au Lycée Félix Faure, à Beauvais),
A. Dusoulier (Tle au Lycée Sophie Barat, à Châtenay-Malabry),
S. Gvozdić (L3 magistère de mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
Y. Wang (1ère année à l'ENSTA Paris, à Palaiseau),
X. Ye (1ère année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
D. Collignon (chef de département à la délégation interrégionale du secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence),
N. Didrit (Professeur agrégé de Mathématiques au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison),
C. Fischler (enseignante à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
V. Lefèvre (chargé de recherche Inria au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon),
T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau),
C. Romon (Secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense),
l'équipe formée par N. Ismaaili Erny (Tle au Lycée International des Pontonniers, à Strasbourg) et T. Schneider (Tle au Lycée Saint-Jean de Passy, à Paris),
l'équipe formée par T. Babelis (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), M. Komisarova (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et A. Sarocinskis (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
l'équipe formée par M. Baccara (M2 Probabilités et Modèles Aléatoires à Sorbonne Université, à Paris), S. Baumert (M1 de Mathématiques à Sorbonne Université, à Paris) et C. Gassot (professeur agrégé de mathématiques au Lycée Geoffroy-Saint-Hilaire, à Etampes).

Solution du problème 15 : Commençons par faire varier deux variables x_i et x_j avec $i \neq j$. Comme la fonction $f(x) = x^4$ est convexe, si $x_i + x_j = x'_i + x'_j$ avec $x_i < x'_i < x'_j < x_j$ alors $f(x_i) + f(x_j) > f(x'_i) + f(x'_j)$. Si l'expression de l'énoncé est maximale, on ne peut donc pas écarter plus x_i et x_j, de sorte que l'un des deux est sur le bord de l'intervalle $[-2, 3]$. Ceci montre qu'au plus une variable n'a pas la valeur -2 ou 3. Soit n le nombre de variables égal à 3, de sorte que $2023 - n$ variables sont égales à -2, et soit $x \in [-2, 3]$ la valeur de la dernière variable. On a donc $3n - 2(2023 - n) + x = 500$, ou encore

$x = 4546 - 5n$, de sorte que x est de la forme $5k+1$ avec k entier. la seule possibilité est donc $x = 1$. On en déduit que $n = \frac{1}{5}(4546-1) = 909$. Ainsi, la valeur maximale de l'expression est $n \times 3^4 + (2023-n) \times 2^4 + x = 91454$.

Ont fourni une solution correcte :
R. Missoum (2nde au Lycée Charlemagne, à Paris),
R. Cruau (Tle au Lycée Le Bon Sauveur, à Le Vésinet),
G. Hoffmann (Tle au Lycée Saint Erembert, à Saint-Germain-en-Laye),
S. Gvozdić (L3 magistère de mathématiques à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
M. Yadollahi (L3 magistère de maths à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
X. Ye (1ère année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
N. Déhais (M1 FES à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
E. Lubek (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
A. Mazeyrat (2ème année à l'INPGI, à Grenoble),
A. Merceron (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
N. Tardy (M1 Hadamard à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette),
P. Drouvillé (4ème année à l'ENS Paris-Saclay, à Gif-sur-Yvette),
D. Collignon (chef de département à la délégation interrégionale du secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence),
N. Didrit (Professeur agrégé de Mathématiques au Lycée La Salle-Passy Buzenval, à Rueil-Malmaison),
C. Fischler (enseignante à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
R. Guezzi (en césure à CentraleSupélec, à Gif-sur-Yvette),
V. Lefèvre (chargé de recherche Inria au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon),
T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau),
C. Romon (Secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense),
l'équipe formée par T. Babelis (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau), M. Komisarova (2ème bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau) et A. Sarocinskis (1ère bachelor à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
l'équipe formée par J. Clément-Cottuz (M2 Mathématiques appliquées à l'Université Grenoble Alpes, à Grenoble) et L. Vanhaelewyn (M1 Mathématiques à l'ENS, à Paris),
l'équipe formée par M. Baccara (M2 Probabilités et Modèles Aléatoires à Sorbonne Université, à Paris), S. Baumert (M1 de Mathématiques à Sorbonne Université, à Paris) et C. Gassot (professeur agrégé de mathématiques au Lycée Geoffroy-Saint-Hilaire, à Etampes).

Solution du problème 16 : Montrons que si m et n sont impairs, Aïcha a une stratégie lui assurant la victoire. Elle choisit librement la case où déposer le premier cavalier. Ensuite, elle regroupe par paires les $m-1$ cases de la même ligne que son cavalier, puis elle fait de même pour les $n-1$ cases pas encore considérées de chaque colonne de l'échiquier. Chaque fois qu'Elsie dépose une tour sur une case c, Aïcha peut déposer un cavalier sur la case formant une paire avec c. Ainsi, Aïcha sera toujours capable de jouer et ce sera Elsie qui perdra.
Montrons maintenant que si m ou n est pair, c'est Elsie qui a une stratégie lui assurant la victoire (et donc pas Aïcha). Comme ci-dessus, il suffit à Elsie de regroupe par paires toutes les cases de l'échiquier, de sorte que deux cases dans une paire sont écartées d'une case horizontalement et de deux cases verticalement, ou bien de deux cases horizontalement et d'une case verticalement. C'est possible pour des échiquiers 4×2, 4×3, 6×3, 6×5 et 6×6 comme le montrent les illustrations ci-dessous (les cases ayant le même numéro formant une paire).

1	2
3	4
2	1
4	3

1	4	3
5	6	1
4	3	2
2	5	6

1	9	8
4	7	1
2	8	9
7	4	6
3	2	5
5	6	3

1	7	11	12	2
5	10	1	7	11
6	8	5	2	12
10	4	14	15	3
8	6	3	9	13
4	9	13	14	15

1	6	18	13	16	2
7	11	1	2	18	13
9	12	6	11	3	16
10	7	5	12	17	15
8	9	4	3	5	14
4	10	8	14	15	17

Si k et ℓ sont des entiers ≥ 1, on peut alors paver :

1. tout échiquier $4k \times 2\ell$ avec des rectangle 4×2,
2. tout échiquier $4k+2 \times 4\ell+2$ avec un rectangle 6×6 et des rectangles $6 \times 4\ell - 4$ et $4k-4, 4\ell+2$ pavables comme dans le cas 1,
3. tout échiquier $2k+1 \times 4\ell$ avec une rangée de rectangles 3×4 puis un rectangle $2(k-1) \times 4\ell$ pavable comme dans le cas 1,
4. tout échiquier $4k-1 \times 4\ell+2$ avec un rectangle 3×6 suivi d'une rangée de rectangles 3×4, puis un rectangle $4k-4 \times 4\ell+2$ pavable comme dans le cas 1,
5. tout échiquier $4k+1 \times 4\ell+2$ avec un rectangle 5×6 suivi d'un rectangle $5 \times 4(\ell-1)$ pavable comme dans le cas 3, puis un rectangle $4(k-1) \times 4\ell+2$ pavable comme dans le cas 1.

Ceci fournit bien une stratégie gagnante pour Elsie pour tout échiquier $m \times n$ avec m ou n pair.

Ont fourni une solution correcte :
R. Cruau (Tle au Lycée Le Bon Sauveur, à Le Vésinet),
M. Yadollahi (L3 magistère de maths à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
X. Ye (1ère année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
E. Lubek (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
A. Merceron (2ème année à l'Ecole Polytechnique, à Palaiseau),
D. Collignon (chef de département à la délégation interrégionale du secrétariat général du ministère de la justice, à Aix-en-Provence),
C. Fischler (enseignante à l'Université Paris-Saclay, à Orsay),
V. Lefèvre (chargé de recherche Inria au LIP, à l'ENS de Lyon, à Lyon),
T. Ravary (enseignant au Lycée Camille Claudel, à Palaiseau),
C. Romon (Secrétaire général de la Mission interministérielle pour la qualité des constructions publiques, à La Défense),
l'équipe formée par M. Baccara (M2 Probabilités et Modèles Aléatoires à Sorbonne Université, à Paris), S. Baumert (M1 de Mathématiques à Sorbonne Université, à Paris) et C. Gassot (professeur agrégé de mathématiques au Lycée Geoffroy-Saint-Hilaire, à Etampes).