Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 679–682
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des nombres

Spectres pour l'approximation d'un nombre réel et de son carré

Stéphane Fischler

D.M.A., E.N.S., 45, rue d'Ulm, 75230 Paris cedex 05, France

Reçu le 13 février 2004 ; accepté après révision le 4 octobre 2004

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Notons $\alpha(\xi)$ l'exposant qui mesure comment un nombre réel non quadratique ξ et son carré peuvent être approchés simultanément par des nombres rationnels de même dénominateur. Davenport et Schmidt ont démontré que $\alpha(\xi)$ est toujours compris (au sens large) entre le nombre d'or γ et 2. Roy, puis Bugeaud et Laurent, ont construit à l'aide de mots ayant beaucoup de préfixes palindromes des réels ξ tels que $\alpha(\xi) < 2$. Dans ce texte, on définit de nouveaux exposants d'approximation qui permettent, dans une certaine mesure, de caractériser les valeurs de $\alpha(\xi)$ obtenues par ces auteurs. ***Pour citer cet article : S. Fischler, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

Spectra for approximating a real number and its square. Let $\alpha(\xi)$ be the exponent that measures how a non-quadratic real number ξ and its square can be simultaneously approximated by rational numbers with the same denominator. Davenport and Schmidt have proved that $\alpha(\xi)$ is always between the golden ratio γ and 2. Roy, and after him Bugeaud and Laurent, have constructed numbers ξ such that $\alpha(\xi) < 2$. Their method involves infinite words with many palindrome prefixes. In this text, we define new exponents of approximation that allow us to obtain, to some extent, a characterization of the values $\alpha(\xi)$ obtained by these authors. ***To cite this article: S. Fischler, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

1. Introduction

Soit ξ un nombre réel, qui n'est pas quadratique. On note $\alpha(\xi)$ la borne inférieure (notée $\widehat{w}_2'(\xi)$ dans [2] et [3], et $1/\lambda$ dans [6]) de l'ensemble des réels α tels que, pour tout réel A suffisamment grand, le système d'inégalités

$$|x_0| \leqslant A, \qquad |x_0\xi - x_1| \leqslant A^{-1/\alpha}, \qquad |x_0\xi^2 - x_2| \leqslant A^{-1/\alpha} \tag{1}$$

Adresse e-mail : stephane.fischler@math.u-psud.fr (S. Fischler).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.10.009

ait une solution en nombres entiers x_0, x_1, x_2 non tous nuls.

Le principe des tiroirs montre qu'on a toujours $\alpha(\xi) \leqslant 2$; en outre pour presque tout nombre ξ (au sens de la mesure de Lebesgue) on a $\alpha(\xi) = 2$. Davenport et Schmidt ont démontré [5] que $\alpha(\xi)$ est, pour tout ξ non quadratique, minoré par le nombre d'or $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots$. Une conjecture largement répandue (parallèle à celle de [9], p. 259) prévoyait $\alpha(\xi) = 2$ pour tout ξ. Mais Roy a construit ([6,7] ; voir aussi [8]) un réel ξ tel que $\alpha(\xi) = \gamma$, montrant que la minoration de Davenport et Schmidt est en fait optimale.

La méthode introduite par Roy peut se résumer ainsi. Soit $w = w_1 w_2 \ldots$ un mot infini dont les lettres w_n appartiennent à un alphabet fini. Étant donné une application injective ϕ de cet alphabet dans l'ensemble des entiers strictement positifs, on peut associer à w le nombre réel ξ dont le développement en fraction continue est $[0, \phi(w_1), \phi(w_2), \phi(w_3), \ldots]$. Le nombre ξ n'est pas quadratique, sauf si w est ultimement périodique. On sait ([9], chapitre I) que la n-ème réduite de ξ s'écrit p_n/q_n, avec $|q_n\xi - p_n| \leqslant q_n^{-1}$ et :

$$\begin{bmatrix} q_n & q_{n-1} \\ p_n & p_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(w_1) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(w_2) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \phi(w_n) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Supposons que, pour une infinité d'entiers n, le mot formé par les n premières lettres de w est un palindrome ; notons (n_i) la suite strictement croissante formée par ces entiers n. Alors la matrice de (2) est symétrique pour $n = n_i$, d'où $q_{n-1} = p_n$. Il en découle que p_{n-1}/q_n est une bonne approximation rationnelle de ξ^2 ; précisément on a pour $n = n_i$:

$$\max\bigl(|q_n\xi - p_n|, |q_n\xi^2 - p_{n-1}|\bigr) \leqslant c\, q_n^{-1}$$

avec une certaine constante c qui dépend seulement de ξ. On en déduit la majoration

$$\alpha(\xi) \leqslant \limsup_{i\to\infty} \frac{\log(q_{n_{i+1}})}{\log(q_{n_i})} \tag{3}$$

qui est intéressante si le membre de droite est strictement inférieur à 2 (c'est-à-dire si le mot w admet suffisamment de préfixes palindromes).

Roy a appliqué cette méthode au mot de Fibonacci, pour lequel (3) donne $\alpha(\xi) \leqslant \gamma$. Puis Bugeaud et Laurent l'ont appliquée, pour toute suite $\underline{s} = (s_k)_{k\geqslant 1}$ d'entiers strictement positifs, au mot sturmien d'angle $[0, s_1, s_2, \ldots]$ (voir aussi [1]). Ils construisent ainsi un réel $\xi_{\underline{s}}$ pour lequel ils démontrent que (3) est une égalité, qui donne $\alpha(\xi_{\underline{s}}) = \limsup_k [1, 1, s_k, s_{k-1}, \ldots, s_1]$. Les plus petites valeurs de $\alpha(\xi_{\underline{s}})$ ainsi obtenues sont :

$$\begin{aligned} \gamma = 1,618\ldots &= [1,1,\overline{1}] \quad \text{pour } \underline{s} = (1,1,1,1,\ldots), \\ 1+\sqrt{2}/2 = 1,707\ldots &= [1,1,\overline{2}] \quad \text{pour } \underline{s} = (2,2,2,2,\ldots), \\ (2+\sqrt{10})/3 = 1,720\ldots &= [1,1,\overline{2,1,1}] \quad \text{pour } \underline{s} = (2,1,1,2,1,1,2,\ldots). \end{aligned}$$

Bugeaud et Laurent indiquent aussi que cette méthode s'applique à d'autres mots ayant beaucoup de préfixes palindromes (notamment le mot de Tribonacci), donnant d'autres réels ξ tels que $\alpha(\xi) < 2$.

La motivation de cette Note est de comprendre en quoi cette construction à l'aide de mots (sturmiens) ayant des préfixes palindromes est naturelle, et quelles sont ses limitations. Pour cela, on introduit de nouveaux exposants d'approximation.

2. De nouveaux exposants d'approximation

Soit ξ un nombre réel non quadratique. Pour tout $\underline{x} = (x_0, x_1, x_2)$ de $\mathbb{Z}^3$, on pose

$$L(\underline{x}) = \max\bigl(|x_0\xi - x_1|, |x_0\xi^2 - x_2|\bigr).$$

2.1. Définitions et premières propriétés

Soit $\varepsilon \in (0, 1]$. Notons $\beta_\varepsilon(\xi)$ la borne inférieure de l'ensemble des β tels que, pour tout A suffisamment grand, il existe $\underline{x} \in \mathbb{Z}^3$ tel que

$$1 \leqslant |x_0| \leqslant A \quad \text{et} \quad L(\underline{x}) \leqslant \min\bigl(A^{-1/\beta}, |x_0|^{\varepsilon-1}\bigr).$$

Si cet ensemble de β est vide, on pose $\beta_\varepsilon(\xi) = +\infty$. Visiblement, la fonction $\varepsilon \mapsto \beta_\varepsilon(\xi)$ est décroissante, et on a $\beta_1(\xi) = \alpha(\xi) \leqslant 2$. On pose :

$$\beta_0(\xi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \beta_\varepsilon(\xi) = \sup_{\varepsilon \in (0,1]} \beta_\varepsilon(\xi).$$

On constate que pour $\varepsilon > 0$, $\beta_\varepsilon(\xi)$ est la borne inférieure de l'ensemble des β pour lesquels il existe une suite $(\underline{x}_i)_{i \geqslant 1}$ telle que

$$L(\underline{x}_i) \leqslant |x_{i,0}|^{\varepsilon-1} \quad \text{et} \quad |x_{i,0}| < |x_{i+1,0}| \leqslant L(\underline{x}_i)^{-\beta} \quad \text{pour tout } i \geqslant 1.$$

Il en découle que $\beta_\varepsilon(\xi) = \alpha(\xi)$ pour tout $\varepsilon > 1 - 1/\alpha(\xi)$. En outre, on peut démontrer (voir [3]) que presque sûrement (au sens de la mesure de Lebesgue) on a $\beta_\varepsilon(\xi) = +\infty$ pour $\varepsilon < 1/2$ et $\beta_\varepsilon(\xi) = 2$ pour $\varepsilon > 1/2$.

La motivation pour introduire ces exposants $\beta_\varepsilon(\xi)$ est que la relation (3) fournie par la méthode des préfixes palindromes est en fait une majoration de $\beta_0(\xi)$: en général, cette méthode ne donne aucune information supplémentaire sur $\alpha(\xi)$, excepté la majoration triviale $\alpha(\xi) \leqslant \beta_0(\xi)$. Or cette méthode des préfixes palindromes est la seule connue actuellement pour produire un réel ξ tel que $\alpha(\xi) < 2$. En particulier, on ne sait pas construire de réel ξ tel que $\alpha(\xi) < 2$ et $\alpha(\xi) < \beta_0(\xi)$ (l'existence même d'un tel ξ est conjecturale).

2.2. Spectres

Pour chaque $\varepsilon \in [0, 1]$ on note $\mathcal{S}_\varepsilon$ l'ensemble des $\beta_\varepsilon(\xi)$, quand ξ décrit l'ensemble des réels non quadratiques. Il s'agit d'analogues du spectre de Markov. Chacun de ces ensembles contient l'ensemble $\mathcal{S}'$ des $\alpha(\xi_{\underline{s}}) = \limsup[1, 1, s_k, \ldots, s_1]$ construits par Bugeaud et Laurent, puisque $\beta_\varepsilon(\xi_{\underline{s}}) = \alpha(\xi_{\underline{s}})$ pour tout ε. Cassaigne a étudié $\mathcal{S}'$, et a montré [4] que les trois valeurs γ, $1 + \sqrt{2}/2$ et $(2 + \sqrt{10})/3$ mentionnées ci-dessus sont les premières d'une suite infinie strictement croissante (σ_n) qui converge vers $\sigma_\infty = 1,721\ldots$, telle que $\mathcal{S}' \cap [1, \sigma_\infty)$ soit exactement l'ensemble des σ_n. En particulier, σ_∞ est le plus petit point d'accumulation de $\mathcal{S}'$.

Concernant l'ensemble $\mathcal{S}_0$, on peut démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.1. *On a*

$$\mathcal{S}_0 \cap [\gamma, \sqrt{3}) = \mathcal{S}' \cap [\gamma, \sqrt{3}).$$

En outre, pour tout ξ tel que $\beta_0(\xi) < \sqrt{3}$, l'exposant $\beta_\varepsilon(\xi)$ ne dépend pas de $\varepsilon \in [0, 1]$.

Dans ce théorème, peut-on remplacer $\sqrt{3}$ par la racine réelle $\tilde{\beta} = 1.839\ldots$ du polynôme $X^3 - X^2 - X - 1$? En considérant le mot de Tribonacci on peut voir que ce théorème serait alors optimal.

En tout cas le Théorème 2.1, joint au travail de Cassaigne, démontre que les plus petits éléments de $\mathcal{S}_0$ sont les σ_n et convergent vers le plus petit point d'accumulation $\sigma_\infty < \sqrt{3}$ de $\mathcal{S}_0$.

Le Théorème 2.1 apporte une réponse partielle à la question suivante (posée dans [3]) : existe-t-il un réel ξ (non quadratique) tel que $\gamma < \alpha(\xi) < 1 + \sqrt{2}/2$? En effet, ce théorème affirme qu'un tel ξ vérifie nécessairement $\beta_0(\xi) \geqslant \sqrt{3} > \alpha(\xi)$. En particulier, la méthode des préfixes palindromes (telle qu'exposée ci-dessus) ne peut pas permettre d'exhiber un tel ξ.

2.3. Structure des bonnes approximations

En supposant $\beta_\varepsilon(\xi) < 2$ pour un certain ε assez petit, on peut obtenir des résultats généraux sur la structure des bonnes approximations de ξ qui contribuent à l'exposant $\beta_\varepsilon(\xi)$. Précisément, pour $\alpha, \beta \in [\gamma, 2)$ on pose $\varepsilon_1(\alpha, \beta) = \min(\frac{(2-\alpha)^2}{15}, 2-\beta)$ et $K(\alpha, \beta) = \max(49^{1/(2-\alpha)}, \frac{4}{2-\beta})$. On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.2. *Soient ξ un réel non quadratique, et trois réels $\alpha, \beta \in [\gamma, 2)$ et $\varepsilon_0 \in [0, 1]$, tels que*

$$\alpha(\xi) \leqslant \alpha, \quad \beta_{\varepsilon_0}(\xi) \leqslant \beta \quad \textit{et} \quad K(\alpha, \beta)\varepsilon_0 < \varepsilon_1(\alpha, \beta).$$

Alors la fonction $\varepsilon \mapsto \beta_\varepsilon(\xi)$ est constante sur l'intervalle $[K(\alpha, \beta)\varepsilon_0,\ \varepsilon_1(\alpha, \beta)]$.

En particulier, si $\beta_0(\xi) < 2$ alors on a $\beta_\varepsilon(\xi) = \beta_0(\xi)$ pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1(\alpha(\xi), \beta_0(\xi))]$.

La preuve du Théorème 2.2 repose de façon essentielle sur les éléments minimaux successifs (voir [5]). On peut en effet démontrer que tout $\underline{x} \in \mathbb{Z}^3$ tel que $L(\underline{x}) \leqslant |x_0|^{\varepsilon-1}$, avec $\alpha(\xi) + \varepsilon < 2$ et $|x_0|$ assez grand, est multiple de l'un d'entre eux. En outre, sous les hypothèses du théorème, le crochet introduit par Roy permet de décrire la relation de récurrence vérifiée par la suite des approximations de ξ correspondant à l'exposant $\beta_\varepsilon(\xi)$. Si $\beta_0(\xi) < \sqrt{3}$, on peut démontrer que cette récurrence est la même que celle relative à l'un des nombres $\xi_{\underline{s}}$, et en déduire le Théorème 2.1.

Remerciements

Ce travail a été réalisé durant un séjour à l'Université d'Ottawa ; je tiens à remercier Damien Roy pour son accueil et ses conseils avisés. Je remercie aussi chaleureusement Michel Waldschmidt, ainsi que Yann Bugeaud et Michel Laurent pour m'avoir envoyé leur article [3].

Note ajoutée aux épreuves

Pendant le processus de parution de cet article, Roy a démontré que l'ensemble des valeurs prises par l'exposant $\alpha(\xi)$ est dense dans l'intervalle $[\gamma, 2]$. Pour cela, il a introduit de nouveaux ingrédients arithmétiques pour généraliser (dans le cas du mot de Fibonacci) la méthode des préfixes palindromes.

Références

[1] J.-P. Allouche, J.L. Davison, M. Queffélec, L.Q. Zamboni, Transcendence of Sturmian or morphic continued fractions, J. Number Theory 91 (1) (2001) 39–66.
[2] Y. Bugeaud, Approximation by Algebraic Numbers, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 160, Cambridge University Press, 2004.
[3] Y. Bugeaud, M. Laurent, Exposants d'approximation et fractions continues sturmiennes, soumis.
[4] J. Cassaigne, Limit values of the recurrence quotient of Sturmian sequences, Theor. Comput. Sci. 218 (1999) 3–12.
[5] H. Davenport, W. Schmidt, Approximation to real numbers by algebraic integers, Acta Arith. 15 (1969) 393–416.
[6] D. Roy, Approximation simultanée d'un nombre et de son carré, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 1–6.
[7] D. Roy, Approximation to real numbers by cubic algebraic integers I, Proc. London Math. Soc. 88 (2004) 42–62.
[8] D. Roy, Approximation to real numbers by cubic algebraic integers II, Ann. Math. 158 (2003) 1081–1087.
[9] W. Schmidt, Diophantine Approximation, Lecture Notes in Math., vol. 785, Springer, 1980.