Mesures d'irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$

Stéphane Fischler

14 juin 2002

1 Résultats qualitatifs

Cet exposé est consacré à l'étude des valeurs aux points entiers $s \geq 2$ de la fonction ζ de Riemann, définie par $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$. Pour s pair, on a $\zeta(s) = c_s \pi^s$, où les c_s sont des nombres rationnels liés aux nombres de Bernoulli. Cette formule était connue d'Euler. Or Lindemann a démontré en 1882 que π est transcendant (voir l'appendice de [8] pour une démonstration). Donc $\zeta(s)$ est transcendant pour tout entier s pair.

En ce qui concerne les entiers s impairs, on ne connaît pas d'analogue de la formule d'Euler, et on conjecture qu'il n'y en pas (pour un énoncé précis, voir la conjecture 1 ci-dessous). La nature arithmétique des valeurs de ζ aux entiers impairs est beaucoup plus difficile à déterminer. Le premier résultat dans cette direction date de 1978 :

Théorème 1 (Apéry, 1978) *$\zeta(3)$ est irrationnel.*

Apéry a annoncé ce résultat [1] lors des Journées Arithmétiques de Luminy. Les détails de la preuve (qui sont loin d'être triviaux) ont été publiés par Van Der Poorten [15], grâce à des contributions de Cohen et Zagier. Par la suite, plusieurs autres démonstrations du théorème d'Apéry sont parues, en particulier celle de Beukers [3]. Des versions quantitatives ont également été obtenues ; c'est l'objet des paragraphes suivants.

La grande percée suivante est due à Rivoal ([2], [13]) :

Théorème 2 (Rivoal, 2000) *Il existe une infinité d'entiers s impairs tels que $\zeta(s)$ soit irrationnel.*

Le théorème de Rivoal est en fait un peu plus précis : le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par 1 et les $\zeta(s)$ pour s impair est de dimension infinie. Cela signifie qu'on peut trouver une suite infinie strictement croissante $s_1, s_2, \ldots$ d'entiers impairs tels que 1, $\zeta(s_1)$, $\zeta(s_2)$, $\ldots$ soient linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. On peut donner des versions quantitatives de ce théorème : Rivoal a montré [14] que parmi les neuf nombres $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\ldots$, $\zeta(21)$ l'un au moins est irrationnel. Ce résultat a été amélioré ensuite [18] :

Théorème 3 (Zudilin, 2001) *L'un au moins des quatre nombres $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ est irrationnel.*

Malgré ces développements récents, il n'existe aucun entier $s \geq 5$ impair pour lequel on sache si $\zeta(s)$ est rationnel ou non. On est encore bien loin de ce qu'on espère :

Conjecture 1 *Les nombres π, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\ldots$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. En particulier ils sont tous transcendants, donc irrationnels.*

Cette conjecture est un cas particulier de la conjecture diophantienne énoncée dans [17] en termes de polyzêtas.

2 Exposant d'irrationalité

Dans tout ce paragraphe, on désigne par α un réel irrationnel. On s'intéresse à la précision à laquelle α peut être approché par des rationnels.

Définition 1 *On dit qu'un réel positif* ν *est* un exposant d'irrationalité *de* α *si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il n'y a qu'un nombre fini de rationnels* p/q *tels que*

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{\nu+\varepsilon}}.$$

La théorie des fractions continues ([5], §11.1), ou le principe des tiroirs de Dirichlet ([5], §11.3), montre qu'il existe une infinité de rationnels p/q tels que $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$. Donc un exposant d'irrationalité est toujours supérieur ou égal à 2.

Il est clair que si ν est un exposant d'irrationalité de α alors tout $\nu' \geq \nu$ l'est aussi. L'ensemble des exposants d'irrationalité de α est donc un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, qui est vide ou bien de la forme $[\mu, +\infty[$.

Définition 2 L'exposant d'irrationalité *de* α *est le plus petit élément de l'ensemble des exposants d'irrationalité de* α *; on le note* $\mu(\alpha)$. *Si cet ensemble est vide, on pose* $\mu(\alpha) = +\infty$.

On a toujours $\mu(\alpha) \geq 2$. Si α est un nombre algébrique (toujours supposé irrationnel), Liouville a démontré ([9] ; voir aussi [5], §11.7) qu'il existe une constante $c(\alpha)$ telle que, pour tout rationnel p/q, on ait $|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{c(\alpha)}{q^{\deg(\alpha)}}$. Cela implique $\mu(\alpha) \leq \deg(\alpha)$. Ce résultat a été amélioré par Roth en 1955 : il a démontré qu'on a $\mu(\alpha) = 2$ pour tout nombre algébrique (irrationnel) α.

En ce qui concerne les nombres transcendants, la situation est moins uniforme. Posons $\lambda = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{10^{n!}}$. Ce nombre, considéré par Liouville [9], possède des approximations rationnelles extrêmement bonnes (obtenues en tronquant la série) ; on en déduit facilement qu'il vérifie $\mu(\lambda) = +\infty$. C'est d'ailleurs de cette manière que Liouville a montré que λ est transcendant. Une variante de cette construction permet, pour tout réel $\mu_0 > 2$, de construire un réel λ_{μ_0} (nécessairement transcendant, d'après le théorème de Roth) tel que $\mu(\lambda_{\mu_0}) = \mu_0$.

Il faut noter que les approximations rationnelles qui interviennent dans la définition de $\mu(\alpha)$ sont toujours des convergents du développement en fraction continue (voir [5], §10.15, théorème 184). Quand on connaît explicitement le développement de α en fraction continue, on peut espérer mesurer avec précision la qualité des meilleures approximations rationnelles de α. C'est le cas pour $\alpha = e$: Davis a démontré (voir [10], §5.1) que l'équation $|e - \frac{p}{q}| < c\frac{\log(\log(q))}{q^2\log(q)}$ a une infinité de solutions si $c > \frac{1}{2}$, mais seulement un nombre fini si $c < \frac{1}{2}$. On en déduit immédiatement que $\mu(e) = 2$.

Les exemples donnés jusqu'à présent montrent que l'exposant d'irrationalité mesure très grossièrement la qualité des approximations rationnelles de α. Presque tout nombre α (au sens de la mesure de Lebesgue) vérifie $\mu(\alpha) = 2$ (voir [6], théorème 32). On conjecture que toute période α (au sens de [7]) vérifie $\mu(\alpha) = 2$; ceci s'applique en particulier à tous les $\zeta(s)$ pour $s \geq 2$ entier. Les seuls nombres α explicites pour lesquels on sait que $\mu(\alpha) > 2$ sont des nombres construits à cet effet.

Très souvent, lorsqu'on démontre *directement* qu'un réel α est irrationnel, on peut rendre cette preuve quantitative et obtenir une majoration de $\mu(\alpha)$. Par exemple, la preuve d'Apéry donne $\mu(\zeta(3)) \leq 13,41782$. En revanche, bien qu'on sache montrer que e^π est transcendant, on ne sait pas si son exposant d'irrationalité est fini. Pour plus de détails, on pourra consulter [16].

La méthode d'Apéry s'applique aussi pour démontrer l'irrationalité de $\zeta(2)$. Ce résultat n'est pas nouveau (puisque $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$), mais il permet d'obtenir la majoration $\mu(\zeta(2)) \leq 11,85078$.

Cette majoration, ainsi que celle pour $\zeta(3)$, a été améliorée successivement par plusieurs auteurs ; le meilleur résultat connu à ce jour est dû à Rhin-Viola, en 1996 [11] pour $\zeta(2)$ et en 2001 [12] pour $\zeta(3)$:

Théorème 4 (Rhin-Viola) *On a $\mu(\zeta(2)) \leq 5,441243$ et $\mu(\zeta(3)) \leq 5,513891$.*

3 Groupe de Rhin-Viola

Dans ce paragraphe, on définit la structure de groupe qui est centrale dans la preuve du théorème 4. Tous les détails sur cette structure, et sur l'ensemble de la méthode mise en jeu, se trouvent dans [11] pour le cas de $\zeta(2)$. Le cas de $\zeta(3)$ n'est pas étudié dans la suite de ce texte, car il est tout à fait analogue à celui de $\zeta(2)$, mais plus long à présenter. Le lecteur intéressé pourra consulter [12].

Soient h, i, j, k, l cinq entiers naturels. Rhin et Viola considèrent l'intégrale suivante :

$$I(h,i,j,k,l) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^h(1-x)^i y^k (1-y)^j}{(1-xy)^{i+j-l}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1-xy}.$$

C'est une intégrale convergente. Quand tous les paramètres sont égaux à un même entier N, on retrouve les intégrales introduites par Beukers [3] pour donner une nouvelle preuve de l'irrationalité de $\zeta(2)$. Beukers a démontré que dans ce cas, l'intégrale s'écrit $u_N\zeta(2) + v_N$, avec u_N entier et v_N rationnel. Rhin et Viola montrent que l'intégrale $I(h,i,j,k,l)$ s'écrit toujours sous la forme $u\zeta(2) + v$, avec u entier et v rationnel qui dépendent des paramètres h, i, j, k, l. Ils obtiennent (par des méthodes classiques) une certaine majoration du dénominateur de v, et utilisent un groupe de transformations pour améliorer cette majoration. C'est cette structure de groupe, et le gain arithmétique qu'ils en déduisent, qui constitue le cœur de leur méthode.

Pour définir cette action de groupe, on travaille formellement (c'est-à-dire qu'on considère h, i, j, k, l comme des indéterminées) et on définit $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= h+i \\ \alpha_2 &= i+j \\ \alpha_3 &= j+k \\ \alpha_4 &= k+l \\ \alpha_5 &= l+h \end{aligned}$$

Le changement de variables réciproque est donné par :

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}(\alpha_5+\alpha_1+\alpha_3-\alpha_2-\alpha_4) \\ i &= \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4-\alpha_3-\alpha_5) \\ j &= \frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_5-\alpha_4-\alpha_1) \\ k &= \frac{1}{2}(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_1-\alpha_5-\alpha_2) \\ l &= \frac{1}{2}(\alpha_4+\alpha_5+\alpha_2-\alpha_1-\alpha_3) \end{aligned}$$

On considère l'action naturelle de $\mathfrak{S}_5$ sur $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_5\}$ (par permutation des indices). On l'étend par linéarité : par exemple, pour $\gamma \in \mathfrak{S}_5$ on a $\gamma(h) = \frac{1}{2}(\alpha_{\gamma(5)} + \alpha_{\gamma(1)} + \alpha_{\gamma(3)} - \alpha_{\gamma(2)} - \alpha_{\gamma(4)})$. Si, dans le pentagone de sommets $1, 2, 3, 4, 5$, les sommets $\gamma(2)$ et $\gamma(4)$ ne sont pas consécutifs, alors $\gamma(h)$ est l'un parmi h, i, j, k, l. Sinon, on voit facilement qu'on obtient l'une des cinq valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} h+i-k &= \frac{1}{2}(\alpha_5+\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4) \\ i+j-l &= \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5) \\ j+k-h &= \frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4-\alpha_5-\alpha_1) \\ k+l-i &= \frac{1}{2}(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5-\alpha_1-\alpha_2) \\ l+h-j &= \frac{1}{2}(\alpha_4+\alpha_5+\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3) \end{aligned}$$

Posons $S = \{h, i, j, k, l, h+i-k, i+j-l, j+k-h, k+l-i, l+h-j\}$. Le groupe $\mathfrak{S}_5$ agit transitivement sur S. Sous l'action du groupe diédral $\mathcal{D}_5$, l'ensemble S se décompose en deux orbites : d'une part $\{h, i, j, k, l\}$, qui correspondent (via la position des signes moins dans les formules ci-dessus) aux paires de sommets non consécutifs du pentagone (c'est-à-dire aux diagonales), et d'autre part $\{h+i-k, i+j-l, j+k-h, k+l-i, l+h-j\}$, qui correspondent aux paires de sommets consécutifs, i.e. aux côtés du pentagone. L'action de $\mathcal{D}_5$ sur $\{h, i, j, k, l\}$ est la même que sur un pentagone de sommets h, i, j, k, l ; mais l'action de $\mathfrak{S}_5$ ne stabilise pas $\{h, i, j, k, l\}$.

Un point crucial de la méthode de la Rhin-Viola pour $\zeta(2)$ est le théorème suivant, qu'ils démontrent à l'aide de deux changements de variables et d'une identité intégrale liée à la fonction hypergéométrique de Gauss :

Théorème 5 *Pour l'action de $\mathfrak{S}_5$ sur S définie ci-dessus :*

- *L'intégrale $I(h, i, j, k, l)$ est invariante par $\mathcal{D}_5$.*
- *Le quotient $\frac{I(h,i,j,k,l)}{h!i!j!k!l!}$ est invariant par $\mathfrak{S}_5$.*

C'est en exploitant les valuations p-adiques du produit de factorielles $h!i!j!k!l!$, et de ses images sous l'action de $\mathfrak{S}_5$, que Rhin et Viola améliorent sensiblement leur majoration du dénominateur de v.

4 Interprétation géométrique

Dans ce paragraphe, on donne une interprétation du théorème 5 en termes d'automorphismes. Davantage de détails, ainsi que l'interprétation analogue pour $\zeta(3)$, se trouvent dans [4].

Notons $\mathcal{V}$ la sous-variété algébrique affine de $\mathbb{R}^5$ définie par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x_1x_2(1+x_5x_3) &= 1 \\ x_2x_3(1+x_1x_4) &= 1 \\ x_3x_4(1+x_2x_5) &= 1 \\ x_4x_5(1+x_3x_1) &= 1 \\ x_5x_1(1+x_4x_2) &= 1 \end{aligned}$$

On note Ω l'ensemble des points de $\mathcal{V}$ à coordonnées strictement positives, et ω la 2-forme différentielle $\mathrm{d}^\times(x_{i-1}x_i) \wedge \mathrm{d}^\times(x_ix_{i+1})$ sur $\mathcal{V}$, avec $\mathrm{d}^\times f = \frac{\mathrm{d}f}{f}$ pour toute fonction f. On montre facilement que $\mathcal{V}$ est de dimension 2, et que ω ne dépend pas du choix de l'indice $i \in \{1, \ldots, 5\}$ (en posant $x_0 = x_5$ et $x_6 = x_1$). On peut paramétrer bijectivement Ω par $]0,1[^2$, ce qui permet de faire le lien avec les intégrales du paragraphe 3 (dont on conserve les notations) :

$$I(h, i, j, k, l) = \int_\Omega x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4} x_5^{\alpha_5} \omega.$$

On peut alors interpréter comme suit la première partie du théorème 5 :

Théorème 6 *Le groupe $\mathcal{D}_5$, qui agit naturellement sur $\mathbb{R}^5$, stabilise $\mathcal{V}$, Ω et ω (au signe près).*

Ce théorème n'est pas difficile à démontrer (par exemple, on voit immédiatement que les équations de $\mathcal{V}$ sont globalement stables par $\mathcal{D}_5$). Il suffit alors, pour chaque $\gamma \in \mathcal{D}_5$, d'effectuer un changement de variables pour en déduire la première assertion du théorème 5.

Notons U l'ensemble des $(t_1, \dots, t_5) \in]0,1[^5$ tels que $t_1 + \ldots + t_5 = 1$, et η la 4-forme différentielle $\mathrm{d}t_1 \wedge \mathrm{d}t_2 \wedge \mathrm{d}t_3 \wedge \mathrm{d}t_4$ sur U. Pour tout $i \in \{1, \dots, 5\}$ on définit une fonction z_i de $\Omega \times U$ dans $\mathbb{R}$ par la formule suivante (dans laquelle les indices sont pris modulo 5) :

$$z_i(x_1, \dots, x_5, t_1, \dots, t_5) = x_i \left(\frac{t_{i-1} t_i t_{i+1}}{t_{i-2} t_{i+2}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On montre, à l'aide de la représentation intégrale de la fonction Γ d'Euler, la formule suivante qui fait le lien avec le paragraphe 3 :

$$\frac{I(h,i,j,k,l)}{h!i!j!k!l!} = \frac{\prod_{n \in S} n!}{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_5 + 4)!} \int_{\Omega \times U} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} z_4^{\alpha_4} z_5^{\alpha_5} \omega \wedge \eta. \tag{1}$$

Sous l'action de $\mathfrak{S}_5$, le produit $\prod_{n \in S} n!$ est invariant car $\mathfrak{S}_5$ agit sur S. Le dénominateur $(\alpha_1 + \ldots + \alpha_5 + 4)!$ étant lui aussi invariant, pour démontrer la deuxième assertion du théorème 5 il suffit de montrer que l'intégrale qui figure au membre de droite de (1) est invariante par $\mathfrak{S}_5$. Ceci provient du théorème suivant (dans lequel les automorphismes sont des fonctions algébriques) :

Théorème 7 *Il existe un groupe H d'automorphismes de $\Omega \times U$ (qui fixent, au signe près, $\omega \wedge \eta$) et un homomorphisme de groupes surjectif $\pi : H \to \mathfrak{S}_5$ tels que, pour tout $f \in H$ et tout $i \in \{1, \dots, 5\}$, on ait :*

$$z_i \circ f = z_{\pi(f)^{-1}(i)}.$$

Références

[1] R. Apéry, *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Astérisque 61 (1979), 11-13.

[2] K.M. Ball et T. Rivoal, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, Invent. Math. 146.1 (2001), 193-207.

[3] F. Beukers, *A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$*, Bull. London Math. Soc. 11.3 (1979), 268-272.

[4] S. Fischler, *Groupes de Rhin-Viola et intégrales multiples*, soumis au J. Théor. Nombres Bordeaux.

[5] G.H. Hardy et E.M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, 3ème édition, Oxford, 1954.

[6] A. Ya. Khintchine, *Continued fractions*, Noordhoff, Groningen, 1963.

[7] M. Kontsevich et D. Zagier, *Periods*, in Mathematics Unlimited - 2001 and beyond, Springer (2001), 771-808.

[8] S. Lang, *Algebra*, 3ème édition, Addison-Wesley, 1993.

[9] J. Liouville, *Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques*, J. Math. Pures Appl. 16 (1851), 133-142.

[10] Yu.V. Nesterenko et N.I. Fel'dman, *Number Theory IV, Transcendental Numbers*, A.N. Parshin et I.R. Shafarevich eds., Encyclopaedia of Mathematical Sciences 44, Springer, 1998.

[11] G. Rhin et C. Viola, *On a permutation group related to $\zeta(2)$*, Acta Arith. 77.1 (1996), 23-56.

[12] G. Rhin et C. Viola, *The group structure for* $\zeta(3)$, Acta Arith. 97.3 (2001), 269-293.

[13] T. Rivoal, *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, C. R. Acad. Sci. Paris I Math. 331.4 (2000), 267-270.

[14] T. Rivoal, *Irrationalité d'au moins un des neuf nombres* $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, ..., $\zeta(21)$, Acta Arith. 103.2 (2002), 157-167.

[15] A. Van Der Poorten, *A proof that Euler missed ... Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$, Math. Intelligencer 1 (1979), 195-203.

[16] M. Waldschmidt, *Un demi-siècle de transcendance*, in Development of Mathematics 1950-2000, J.-P. Pier ed., Birkhäuser Verlag (2000), 1121-1186.

[17] M. Waldschmidt, *Valeurs zêta multiples : une introduction*, J. Théor. Nombres Bordeaux 12 (2000), 581-595.

[18] W. Zudilin, *One of the numbers* $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ *is irrational*, Russian Math. Surveys 56.4 (2001), 774-776.

Stéphane Fischler
Département de Mathématiques et Applications
École Normale Supérieure
45, rue d'Ulm
75230 Paris Cedex 05, France
fischler@dma.ens.fr