S1 PCST, Option Math 152 — Univ. Paris-Sud, Orsay
Bases du raisonnement mathématique — 8 janvier 2015

Examen

Durée : 1 heure 30

L'élément principal d'appréciation des copies est la rigueur logique dans la réponse aux questions. Les preuves devront être fondées uniquement sur les définitions et méthodes vues en cours ce semestre, et sur des propriétés mathématiques banales (de niveau collège ou lycée). L'utilisation de la notion de dérivée est interdite, ainsi que l'application de théorèmes d'analyse utilisant la continuité ou la monotonie de fonctions. On pourra cependant utiliser le théorème de passage à la limite : si une suite réelle (u_n) tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ et vérifie $u_n \leq x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors on a $\ell \leq x$.

Une proportion assez importante des points sera attribuée aux trois premiers exercices. Il est donc fortement conseillé de bien relire les réponses données, ainsi que les preuves dans l'exercice 3 (sachant qu'aucune justification n'est demandée dans les exercices 1 et 2).

Exercice 1 - Dire si chacune des phrases logiques suivantes est vraie ou fausse ; aucune justification n'est demandée :

$$(a) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Big(x \geq 0 \text{ ou } x \leq 0 \Big)$$
$$(b) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Big(x \geq 0 \text{ et } x \leq 0 \Big)$$
$$(c) \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \Big(x \geq 0 \text{ et } x \leq 0 \Big)$$
$$(d) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Big(x \geq 2 \Rightarrow x \geq 0 \Big)$$
$$(e) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Big(x \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Big)$$
$$(f) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Big(x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 0 \Big)$$

Exercice 2 - Ecrire chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}$ sous la forme d'un intervalle $[a, b]$; aucune justification n'est demandée :

$$(a)\ [2,5] \cup [3,9] \qquad (b)\ [2,5] \cap [3,9]$$

Exercice 3 - Déterminer si chacune des phrases logiques suivantes est vraie ou fausse, en justifiant votre réponse par une preuve :

$$(a) \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad y > x + 1$$
$$(b) \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad y > x + 1$$

Exercice 4 - Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ l'ensemble des réels x tels que $x \neq x_0$; autrement dit, c'est la réunion des intervalles ouverts $]-\infty, x_0[$ et $]x_0, +\infty[$.

(a) Soient x et y deux réels tels que $x \neq 3$ et $y \neq 2$. Démontrer l'équivalence suivante :

$$y = \frac{2x+1}{x-3} \iff x = \frac{3y+1}{y-2}.$$

(b) En utilisant la question précédente, démontrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} g & : \mathbb{R}\setminus\{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{x-3} \end{array}$$

est bien définie et bijective. *On rappelle que les preuves doivent être fondées sur des définitions, et pas sur l'utilisation de théorèmes d'analyse portant sur la continuité ou la monotonie éventuelle de fonctions.*

(c) Déterminer $g^{-1}(-5)$.

Exercice 5 - Notons E l'ensemble des réels de la forme $3 - \frac{1}{n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$; autrement dit,

$$E = \{3 - \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

On rappelle qu'un *majorant* de E est un nombre réel y tel que :

$$\forall x \in E, \quad x \leq y.$$

(a) Démontrer que l'ensemble des majorants de E est l'intervalle $[3, +\infty[$.

(b) En déduire la borne supérieure de E.

(c) L'ensemble E a-t-il un plus grand élément ?

Exercice 6 - Notons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (x-1)^2 + 3$. On rappelle que si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$, on note

$$f(A) \;=\; \{f(a),\ a \in A\} \;=\; \{y \in \mathbb{R}, \quad \exists a \in A, \quad y = f(a)\}$$

et

$$f^{-1}(B) \;=\; \{x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \in B\}.$$

On rappelle que les preuves doivent être fondées sur des définitions comme celles rappelées ici, et pas sur l'utilisation de théorèmes d'analyse portant sur la continuité ou la monotonie éventuelle de fonctions.

(a) Démontrer que $f([2,3]) = [4,7]$.

(b) Déterminer $f^{-1}([7,12])$.

Exercice 7 - Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Notons $\mathcal{P}_1(A)$ la propriété

$$\forall a \in A \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad ax \in A,$$

et $\mathcal{P}_2(A)$ la propriété

$$A = \emptyset \quad \text{ou} \quad A = \{0\} \quad \text{ou} \quad A = \mathbb{R}.$$

Démontrer que $\mathcal{P}_1(A)$ et $\mathcal{P}_2(A)$ sont équivalentes.