

S1 PCST, Option Math 152 — Univ. Paris-Sud, Orsay

Bases du raisonnement mathématique — 8 janvier 2015

Corrigé de l'examen

Exercice 1 -

(a) V (b) F (c) V (d) V (e) F (f) F

Exercice 2 -

(a) $[2,5] \cup [3,9] = [2,9]$ (b) $[2,5] \cap [3,9] = [3,5]$

Exercice 3 -

(a) Vraie. Soit $x \in \mathbb{N}$. Posons $y = x+2$. Alors on a bien $y \in \mathbb{N}$ et $y > x+1$.

(b) Fausse. Démontrons le contraire, c'est-à-dire :

$$\exists x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad y \leq x+1.$$

Posons $x = 3$ et $y = 1$. On a bien $y \leq x+1$.

Exercice 4 -

(a) Par produit en croix, on obtient

$$y = \frac{2x+1}{x-3} \iff yx - 3y = 2x+1 \qquad \text{et} \qquad x = \frac{3y+1}{y-2} \iff xy - 2x = 3y+1.$$

L'équivalence cherchée en découle immédiatement.

(b) Montrons d'abord que g est bien définie. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ la formule $\frac{2x+1}{x-3}$ a un sens (car le dénominateur ne s'annule pas puisque $x \neq 3$) ; il s'agit bien d'un élément de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ puisque la relation $\frac{2x+1}{x-3} = 2$ conduirait par produit en croix à $2x+1 = 2x-6$ ce qui est absurde.

Montrons maintenant que g est bijective. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. D'après la question précédente, y admet un antécédent et un seul dans $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, à savoir $\frac{3y+1}{y-2}$. Donc g est bijective.

(c) Par définition, $g^{-1}(-5)$ est l'unique élément $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ tel que $\frac{2x+1}{x-3} = -5$. D'après la question (a), on a donc $g^{-1}(-5) = \frac{-14}{-7} = 2$.

Exercice 5 -

(a) Soit y un majorant de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $y \geq 3 - \frac{1}{n+1}$. En passant à la limite quand n tend vers l'infini, on en déduit $y \geq 3$. Réciproquement, soit $y \in [3, +\infty[$. Soit $x \in E$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = 3 - \frac{1}{n+1}$. On a donc $y \geq 3 \geq 3 - \frac{1}{n+1} = x$. Donc y est un majorant de E.

(b) Par définition, la borne supérieure de E (si elle existe) est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de E. D'après la question précédente, elle existe et vaut 3.

(c) Si l'ensemble E avait un plus grand élément M, ce serait 3 (en effet on aurait $M \leq 3$ puisque 3 est un majorant de E et $M \in E$, et aussi $3 \leq M$ puisque 3 est le plus petit majorant de E et que M serait un majorant de E). Or $3 \notin E$, donc E n'a pas de plus grand élément.

Exercice 6 -

(a) Soit $y \in f([2,3])$. Il existe $x \in [2,3]$ tel que $y = f(x)$. On a $1 \leq x - 1 \leq 2$ donc $1 \leq (x-1)^2 \leq 4$ (en élevant les inégalités au carré entre nombres positifs). On en déduit que $y = (x-1)^2 + 3$ appartient à l'intervalle $[4,7]$. Réciproquement, si $y \in [4,7]$ alors $y - 3 \in [1,4]$ donc $\sqrt{y-3}$ existe et appartient à l'intervalle $[1,2]$. On peut donc considérer $x = \sqrt{y-3} + 1$: on a $x \in [2,3]$ et $f(x) = (\sqrt{y-3})^2 + 3 = y$. Finalement on a donc démontré que $f([2,3]) = [4,7]$.

(b) Soit $x \in f^{-1}([7,12])$. On a $7 \leq (x-1)^2 + 3 \leq 12$ donc $4 \leq (x-1)^2 \leq 9$. En prenant la racine carrée (entre nombres positifs) on en déduit $2 \leq |x-1| \leq 3$. On distingue alors deux cas : si $x - 1 \geq 0$ alors on a $2 \leq x - 1 \leq 3$ donc $x \in [3,4]$; dans le cas contraire on a $|x-1| = -(x-1) = 1 - x$ donc $2 \leq 1 - x \leq 3$ ce qui donne $-3 \leq x - 1 \leq -2$ puis $x \in [-2,-1]$. On a donc démontré que $f^{-1}([7,12]) \subset [3,4] \cup [-2,-1]$. Démontrons maintenant l'inclusion réciproque. Soit $x \in [3,4] \cup [-2,-1]$: on a $x \in [3,4]$ ou $x \in [-2,-1]$. On peut donc distinguer deux cas. Tout d'abord, si $x \in [3,4]$ alors $2 \leq x - 1 \leq 3$ donc $4 \leq (x-1)^2 \leq 9$ (en élevant les inégalités au carré entre nombres positifs) d'où $f(x) \in [7,12]$ et finalement $x \in f^{-1}([7,12])$. Dans le second cas, on a $x \in [-2,-1]$ donc $-3 \leq x - 1 \leq -2$ puis $2 \leq 1 - x \leq 3$. En élevant les inégalités au carré (entre nombres positifs) on obtient $(1-x)^2 = (x-1)^2 \in [4,9]$ puis $f(x) \in [7,12]$ et finalement $x \in f^{-1}([7,12])$.

Exercice 7 - Supposons $\mathcal{P}_1(A)$ vraie. On peut distinguer deux cas selon que A est inclus dans $\{0\}$ ou pas. Dans le premier cas, on a $A = \emptyset$ ou $A = \{0\}$ car ce sont les deux seules parties de $\{0\}$; la propriété $\mathcal{P}_2(A)$ est donc vraie dans ce cas. Dans le second cas, il existe $a \in A$ tel que $a \notin \{0\}$, c'est-à-dire tel que $a \neq 0$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = y/a$. La propriété $\mathcal{P}_1(A)$ montre que $ax = y$ appartient à A. On a donc montré que $\mathbb{R} \subset A$. Comme A est une partie de $\mathbb{R}$, on en déduit $A = \mathbb{R}$ et la propriété $\mathcal{P}_2(A)$ est vraie.

Réciproquement, supposons $\mathcal{P}_2(A)$ vraie. On peut distinguer trois cas. Si $A = \emptyset$, la propriété $\mathcal{P}_1(A)$ est vraie car elle commence par $\forall a \in \emptyset$. Si $A = \{0\}$ la propriété $\mathcal{P}_1(A)$ signifie $\forall x \in \mathbb{R} \;\; 0x \in A$, ce qui est vrai puisque $0x = 0$. Enfin, si $A = \mathbb{R}$ alors la propriété $\mathcal{P}_1(A)$ signifie $\forall a, x \in \mathbb{R} \;\; ax \in \mathbb{R}$ ce qui est vrai : le produit de deux nombres réels est toujours un nombre réel. Donc la propriété $\mathcal{P}_1(A)$ est vraie dans les trois cas.