

## PARTIEL

Durée : 1 heure 30

L'élément principal d'appréciation des copies est la rigueur logique dans la réponse aux questions. Les preuves devront être fondées uniquement sur les définitions et méthodes vues en cours ce semestre, et sur des propriétés mathématiques banales (de niveau collège par exemple). L'utilisation de la notion de dérivée est notamment interdite, ainsi que l'application de théorèmes sur les limites de suites (encadrement, ...).

**Exercice 1** - Ecrire la négation de la phrase logique suivante (aucune justification n'est demandée, et on ne demande pas non plus si cette phrase est vraie ou fausse) :

$$\exists a \in \mathbb{N} \quad \forall b \in \mathbb{N} \quad \exists c \in \mathbb{N} \quad a^2 + b^2 > c.$$

**Exercice 2** - Notons  $V$  une phrase logique vraie, et  $F$  une phrase logique fausse. Dire si chacune des phrases logiques suivantes est vraie ou fausse ; aucune justification n'est demandée :

$$(a) V \text{ ou } F \quad (b) V \text{ et } F \quad (c) V \Rightarrow F \quad (d) F \Rightarrow V \quad (e) V \Leftrightarrow F$$

**Exercice 3** - Notons  $f : ]2, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{1}{x-2}$ . Démontrer que  $f$  est décroissante sur  $]2, +\infty[$ . *On rappelle que l'utilisation de la dérivée est interdite.*

**Exercice 4** - Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , posons  $g(x) = 2x^2 - 3$ . La fonction  $g$  ainsi définie est-elle croissante sur  $\mathbb{R}$  ? Justifier votre réponse par une preuve. *On rappelle à nouveau que l'utilisation de la dérivée est interdite.*

**Exercice 5** - Notons  $(u_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par  $u_n = \frac{1}{n^2+2}$ . Démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ . *On rappelle que l'utilisation de théorèmes sur les limites (notamment le théorème d'encadrement) est interdite.*

**Exercice 6** - Démontrer la phrase logique suivante :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \left[ (y \neq 1) \Leftrightarrow \left( \exists x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 2 \quad \text{et} \quad y = \frac{x-1}{x-2} \right) \right].$$