

CORRIGÉ DU PARTIEL

Exercice 1 - $\forall a \in \mathbb{N} \quad \exists b \in \mathbb{N} \quad \forall c \in \mathbb{N} \quad a^2 + b^2 \leq c$.

Exercice 2 -

- (a) V ou F : vraie (b) V et F : fausse (c) $V \Rightarrow F$: fausse
(d) $F \Rightarrow V$: vraie (e) $V \Leftrightarrow F$: fausse

Exercice 3 - Soient $x_1, x_2 \in]2, +\infty[$. Supposons $x_1 \leq x_2$. Alors on a $x_1 - 2 \leq x_2 - 2$, et ces deux nombres réels sont strictement positifs. Donc $\frac{1}{x_1-2} \geq \frac{1}{x_2-2}$, c'est-à-dire $f(x_1) \geq f(x_2)$. On a démontré que f est décroissante sur $]2, +\infty[$.

Exercice 4 - La fonction g n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$. En effet, posons $x_1 = -5$ et $x_2 = 0$. On a $x_1 \leq x_2$ et $g(x_1) > g(x_2)$ (car $g(-5) = 47$ et $g(0) = -3$). Donc l'implication $(x_1 \leq x_2) \Rightarrow (g(x_1) \leq g(x_2))$ est fausse.

Exercice 5 - Soit $\varepsilon > 0$. Posons $N = \max(\lfloor 1/\varepsilon \rfloor, 1)$, de telle sorte que $N \geq 1/\varepsilon$ et $N \geq 1$. Soit $n \geq N$. Alors on a $n^2 + 2 \geq N^2 + 2 \geq N + 2 \geq N \geq 1/\varepsilon > 0$ donc $0 \leq u_n \leq \varepsilon$, ce qui démontre que $|u_n| \leq \varepsilon$.

Exercice 6 - Soit $y \in \mathbb{R}$.

Supposons $y \neq 1$. Posons $x = \frac{2y-1}{y-1}$. Cette valeur peut être devinée en partant, au brouillon, de la relation $y = \frac{x-1}{x-2}$ dont on souhaite qu'elle soit vérifiée, et en exprimant x en fonction de y grâce à un produit en croix. Alors on a $x \neq 2$, car la relation $2 = \frac{2y-1}{y-1}$ conduirait, par produit en croix, à $2y - 2 = 2y - 1$. En outre il vient

$$\frac{x-1}{x-2} = \frac{\frac{2y-1}{y-1} - 1}{\frac{2y-1}{y-1} - 2} = \frac{(2y-1) - (y-1)}{(2y-1) - 2(y-1)} = y.$$

Réciproquement, supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq 2$ et $y = \frac{x-1}{x-2}$. Alors l'égalité $y = 1$ conduit, par produit en croix, à $x-1 = x-2$ ce qui donne $-1 = -2$: c'est contradictoire. Donc on a $y \neq 1$.