

S1 PCST, Option Math 152 — Univ. Paris-Sud, Orsay
Bases du raisonnement mathématique — 10 juillet 2015

Examen – 2ème Session

L'élément principal d'appréciation des copies est la rigueur logique dans la réponse aux questions. Les preuves devront être fondées uniquement sur les définitions et méthodes vues en cours de Math152, et sur des propriétés mathématiques banales (de niveau collège ou lycée). L'utilisation de la notion de dérivée est interdite, ainsi que l'application de théorèmes d'analyse utilisant la continuité ou la monotonie de fonctions.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur ou une imprécision dans l'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1 - Dire si chacune des phrases logiques suivantes est vraie ou fausse ; aucune justification n'est demandée :

$$\begin{array}{ll}
(a) & \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x \geq y \\
(b) & \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x \geq y \\
(c) & \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x \geq y \\
(d) & \exists x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x \geq y \\
(e) & \forall x \in \mathbb{R} \quad \Big(x \geq 3 \quad \text{ou} \quad x \leq 5 \Big) \\
(f) & \forall x \in \mathbb{R} \quad \Big(x \geq 5 \quad \text{ou} \quad x \leq 3 \Big)
\end{array}$$

Exercice 2 - Ecrire chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}$ sous la forme d'un intervalle $[a, b]$; aucune justification n'est demandée :

(a) $\{x \in \mathbb{R}, \quad |x| \leq 3 \quad \text{et} \quad x \geq -1\}$ $\qquad$ (b) $\{x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \leq 4 \quad \text{et} \quad x \leq 0\}$

Exercice 3 - Déterminer si chacune des phrases logiques suivantes est vraie ou fausse, en justifiant votre réponse par une preuve :

$$\begin{array}{ll}
(a) & \exists x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad x \geq y^2 - 1 \\
(b) & \exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad x \geq y^2 - 1
\end{array}$$

Suite de l'énoncé au verso

Exercice 4 - Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ l'ensemble des réels x tels que $x \neq x_0$; autrement dit, c'est la réunion des intervalles ouverts $]-\infty, x_0[$ et $]x_0, +\infty[$.

(a) Soient x et y deux réels tels que $x \neq -3$ et $y \neq -1$. Démontrer l'équivalence suivante :

$$y = \frac{-x+2}{x+3} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{-3y+2}{y+1}.$$

(b) En utilisant la question précédente, démontrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} g \ : \mathbb{R}\setminus\{-3\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{-1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{-x+2}{x+3} \end{array}$$

est bien définie et bijective. *On rappelle que les preuves doivent être fondées sur des définitions, et pas sur l'utilisation de théorèmes d'analyse portant sur la continuité ou la monotonie éventuelle de fonctions.*

(c) Déterminer $g^{-1}(-6)$.

Exercice 5 - Notons E l'ensemble des réels de la forme $\frac{(-1)^n}{n}$ avec $n \geq 1$ entier, c'est-à-dire

$$E = \left\{ \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^\star \right\}.$$

Démontrer que E admet un plus grand élément et un plus petit élément.

Exercice 6 - Notons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2$. On rappelle que si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$, on note

$$f(A) \ = \ \{f(a), \ a \in A\} \ = \ \{y \in \mathbb{R}, \quad \exists a \in A, \quad y = f(a)\}$$

et

$$f^{-1}(B) \ = \ \{x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \in B\}.$$

On rappelle que les preuves doivent être fondées sur des définitions comme celles rappelées ici, et pas sur l'utilisation de théorèmes d'analyse portant sur la continuité ou la monotonie éventuelle de fonctions.

(a) Démontrer que $f([-3, 2]) = [-2, 7]$.

(b) Déterminer $f^{-1}([-1, 2])$.