S1 PCST, Option Math 152 — Univ. Paris-Sud, Orsay
Bases du raisonnement mathématique — 8 janvier 2016

Examen

Durée : 1 heure 30

L'élément principal d'appréciation des copies est la rigueur logique dans la réponse aux questions. Les preuves devront être fondées uniquement sur les définitions et méthodes vues en cours ce semestre, et sur des propriétés mathématiques banales (de niveau collège par exemple). L'utilisation de la notion de dérivée est notamment interdite, ainsi que l'application de théorèmes sur les limites de suites (encadrement, . . .).

Exercice 1 - Ecrire la négation de chacune des phrases logiques suivantes (aucune justification n'est demandée, et on ne demande pas non plus si ces phrases sont vraies ou fausses) :

$$(a) \quad \exists a \in \mathbb{N} \quad \Big((a \geq 2) \text{ ou } (a^2 < 5) \Big)$$

$$(b) \quad \forall b \in \mathbb{N} \quad \Big((b \geq 3) \Rightarrow (b^2 \geq 8) \Big)$$

Exercice 2 - Dire si chacune des phrases logiques suivantes est vraie ou fausse ; aucune justification n'est demandée :

$$(a) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad \Big((x \geq 2y) \Rightarrow (x^2 \geq 4y^2) \Big)$$

$$(b) \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \Big((x \geq 2y) \Leftrightarrow (x^2 \geq 4y^2) \Big)$$

$$(c) \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \Big((x \geq 2y) \Leftrightarrow (x^2 \geq 4y^2) \Big)$$

Exercice 3 - Pour chacune des phrases logiques suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, puis le démontrer :

$$(a) \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad y^2 \geq x + 3$$

$$(b) \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad y^2 \geq x + 3$$

Exercice 4 - Notons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 + 3x + 1$. Répondre aux questions suivantes, en fournissant des preuves qui consistent à revenir aux définitions. *On rappelle que l'utilisation de la dérivée est interdite.*

(a) La fonction f est-elle strictement croissante sur $[2, 3]$?

(b) La fonction f est-elle strictement croissante sur $[-4, -3]$?

Exercice 5 - Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on rappelle que $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ est l'ensemble des réels x tels que $x \neq x_0$; autrement dit, c'est la réunion des intervalles ouverts $]-\infty, x_0[$ et $]x_0, +\infty[$. On note $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ la fonction définie par $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$. *On rappelle que les preuves doivent être fondées sur des définitions, et pas sur l'utilisation de théorèmes d'analyse portant sur la continuité ou la monotonie éventuelle de fonctions.*

(a) Démontrer que g est bien définie et bijective ; expliciter la bijection réciproque g^{-1}.

(b) Déterminer $g(]1, 2])$. (Indication : on pourra écrire $g(x)$ sous la forme $\alpha + \frac{\beta}{x-1}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bien choisis)

Exercice 6 - Notons $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$. *On rappelle que l'utilisation de théorèmes sur les limites (notamment le théorème d'encadrement) est interdite.*

Exercice 7 - Soit n un entier supérieur ou égal à 2, fixé dans tout cet exercice. Notons H l'ensemble suivant :

$$H = \{x \in \mathbb{Z} \quad | \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = kn\}.$$

Autrement dit, H est l'ensemble des $x \in \mathbb{Z}$ tels qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant $x = kn$. Démontrer les propriétés suivantes :

(a) $0 \in H$.

(b) $\forall x \in H \quad -x \in H$.

(c) $\forall x \in H \quad \forall y \in H \quad x + y \in H$.

Exercice 8 - Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite ; on définit deux suites $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ en posant $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que les suites (v_n) et (w_n) ont la même limite ℓ. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.