

S1 PCST, Option Math 152 — Univ. Paris-Sud, Orsay
Bases du raisonnement mathématique — 8 janvier 2016

Corrigé de l'Examen

Exercice 1 -

$$(a) \quad \forall a \in \mathbb{N} \quad \Big((a < 2) \text{ et } (a^2 \geq 5)\Big)$$

$$(b) \quad \exists b \in \mathbb{N} \quad \Big((b \geq 3) \text{ et } (b^2 < 8)\Big)$$

Exercice 2 - (a) VRAIE (b) FAUSSE (c) VRAIE

Exercice 3 -

(a) VRAIE. Soit $x \in \mathbb{N}$. Posons $y = x + 3$. Alors on a $y \geq 3$ donc $y^2 \geq 3y$ (en multipliant les deux membres par y, qui est positif) donc $y^2 \geq y = x + 3$.

(b) FAUSSE. Démontrons le contraire, c'est-à-dire $\forall y \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \mathbb{N} \quad y^2 < x + 3$. Soit $y \in \mathbb{N}$. Posons $x = y^2$. Alors on a $x + 3 = y^2 + 3 > y^2$.

Exercice 4 -

(a) OUI. Soient $x, x' \in [2, 3]$; supposons $x < x'$. Comme ce sont des nombres strictement positifs on peut élever cette inégalité au carré, ce qui donne $x^2 < x'^2$; par ailleurs on peut aussi la multiplier par 3 (car $3 > 0$), d'où $3x < 3x'$. En additionnant les deux inégalités obtenues et en ajoutant 1 à chaque membre on obtient $f(x) < f(x')$.

(b) NON. On a $f(-4) = 5$ et $f(-3) = 1$ donc $f(-4) \geq f(-3)$ alors que $-4 < -3$.

Exercice 5 -

(a) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Si $\frac{2x+1}{x-1} = 2$ alors $2x+1 = 2(x-1)$ ce qui donne $1 = -2$: c'est impossible. Donc la fonction $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ est bien définie. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Alors les quatre propriétés suivantes sont équivalentes (pour $x \in \mathbb{R}$) :

$$y = \frac{2x+1}{x-1}; \qquad y(x-1) = 2x + 1; \qquad (y-2)x = y + 1; \qquad x = \frac{y+1}{y-2}.$$

De plus ces propriétés sont fausses (ou n'ont pas de sens) pour $x = 1$ (notamment l'égalité $\frac{y+1}{y-2} = 1$ impliquerait $y + 1 = y - 2$ donc $1 = -2$, ce qui est impossible). Donc y admet par g un unique antécédent (dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$), qui est $\frac{y+1}{y-2}$. Cela montre que g est bijective et que sa bijection réciproque $g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ est donnée par $g^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-2}$.

(b) Soit $x \in]1, 2]$. Alors on a $0 < x-1 \le 1$ donc $\frac{1}{x-1} \ge 1$ d'où $\frac{3}{x-1} \ge 3$. Or $g(x) = 2+\frac{3}{x-1}$ donc $g(x) \ge 5$, c'est-à-dire $g(x) \in [5, +\infty[$. On a démontré que $g(]1, 2]) \subset [5, +\infty[$; démontrons l'inclusion réciproque. Soit $y \in [5, +\infty[$; posons $x = g^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-2} = 1 + \frac{3}{y-2}$. Comme $y \ge 5$ on a $y - 2 \ge 3 > 0$ donc $\frac{3}{y-2} \le 1$ puis $x \le 2$. Par ailleurs, comme $y \ge 5$ on a $\frac{3}{y-2} > 0$ donc $x > 1$. On a donc construit $x \in]1, 2]$ tel que $g(x) = y$. Cela termine la preuve de l'inclusion réciproque, donc celle de l'égalité $g(]1, 2]) = [5, +\infty[$.

Exercice 6 - Soit $\varepsilon > 0$. Posons $N = \frac{1}{\varepsilon^2}$ (ou alors $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \rfloor + 1$, en notant $\lfloor \cdot \rfloor$ la partie entière, de façon à obtenir un *entier* N tel que $N \ge \frac{1}{\varepsilon^2}$). Soit $n \ge N$. Alors on a :

$$|u_n - 2| = \left|\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \le \frac{1}{\sqrt{N+1}} \le \frac{1}{\sqrt{N}} \le \varepsilon.$$

Exercice 7 -

(a) Posons $k = 0$. Alors $0 = 0n$ donc $0 \in H$.

(b) Soit $x \in H$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = kn$. Posons $k' = -k$. Alors $-x = -kn = (-k)n = k'n$ donc $-x \in H$.

(c) Soit $x \in H$. Soit $y \in H$. Il existe $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que $x = kn$ et $y = \ell n$. Posons $p = k + \ell$. Alors $x + y = kn + \ell n = (k + \ell)n = pn$ donc $x + y \in H$.

Exercice 8 - Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$, il existe N_1 tel que pour tout $k \ge N_1$ on ait $|v_k - \ell| \le \varepsilon$. De même, comme $\lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$, il existe N_2 tel que pour tout $k \ge N_2$ on ait $|w_k - \ell| \le \varepsilon$. Posons $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Soit $n \ge N$. Si n est pair alors il existe un entier k tel que $n = 2k$; en outre on a $k \ge N_1$ car $n \ge N \ge 2N_1$. Donc on a $|u_n - \ell| = |v_k - \ell| \le \varepsilon$ dans ce cas. Sinon n est impair, et il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$; en outre on a $k \ge N_2$ car $n \ge N \ge 2N_2 + 1$. Donc on a $|u_n - \ell| = |w_k - \ell| \le \varepsilon$ dans ce cas. Finalement, dans tous les cas on a démontré que $|u_n - \ell| \le \varepsilon$.