Téléchargé depuis http://www.math.u-psud.fr/~fischler/enseignement.html

S1 PCST, Option Math 152 — Univ. Paris-Sud, Orsay
Bases du raisonnement mathématique — 13 novembre 2015

Partiel

Durée : 1 heure 30

L'élément principal d'appréciation des copies est la rigueur logique dans la réponse aux questions. Les preuves devront être fondées uniquement sur les définitions et méthodes vues en cours ce semestre, et sur des propriétés mathématiques banales (de niveau collège par exemple). L'utilisation de la notion de dérivée est notamment interdite, ainsi que l'application de théorèmes sur les limites de suites (encadrement, ...).

Exercice 1 - Ecrire la négation de la phrase logique suivante (aucune justification n'est demandée, et on ne demande pas non plus si cette phrase est vraie ou fausse) :

$$\exists a \in \mathbb{N} \quad \exists b \in \mathbb{N} \quad \forall c \in \mathbb{N} \quad \Big((a \neq c) \text{ et } (a^2 + b < c) \Big).$$

Exercice 2 - Pour chacune des phrases logiques suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, puis le démontrer :

$$(a) \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad \Big((x \geq 2y+1) \Rightarrow (x+3 \geq y) \Big)$$

$$(b) \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad \Big((x \geq 2y+1) \Leftrightarrow (x+3 \geq y) \Big)$$

$$(c) \quad \exists x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \Big((x \geq 2y+1) \Leftrightarrow (x+3 \geq y) \Big)$$

Exercice 3 - Notons $f :]2, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{3}{4x-1}$. Démontrer que f est strictement décroissante sur $]2, +\infty[$. *On rappelle que l'utilisation de la dérivée est interdite.*

Exercice 4 - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = -x^2 + 2x + 1$. La fonction g ainsi définie est-elle décroissante sur $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse par une preuve. *On rappelle à nouveau que l'utilisation de la dérivée est interdite.*

Exercice 5 - Notons $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = -3 + \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = -3$. *On rappelle que l'utilisation de théorèmes sur les limites (notamment le théorème d'encadrement) est interdite.*

Exercice 6 - Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites bornées. Notons $(w_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Démontrer que $(w_n)_{n\geq 0}$ est bornée.

Exercice 7 - Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite, et ℓ un nombre réel, tels que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Soit α un nombre réel tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n \leq \alpha$. Démontrer que $\ell \leq \alpha$. *Il s'agit d'un théorème bien connu ; le but de cet exercice est de le démontrer à partir des définitions vues en cours.*