

S1 PCST, Option Math 152 — Univ. Paris-Sud, Orsay
Bases du raisonnement mathématique — Juin 2016

Examen – 2ème session

Durée : 1 heure 30

L'élément principal d'appréciation des copies est la rigueur logique dans la réponse aux questions. Les preuves devront être fondées uniquement sur les définitions et méthodes vues en cours ce semestre, et sur des propriétés mathématiques banales (de niveau collège par exemple). L'utilisation de la notion de dérivée est notamment interdite, ainsi que l'application de théorèmes sur les limites de suites (encadrement, ...), sauf dans l'exercice 6.

Exercice 1 - Ecrire la négation de chacune des phrases logiques suivantes (aucune justification n'est demandée, et on ne demande pas non plus si ces phrases sont vraies ou fausses) :

$$(a) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{N} \quad \Big((x > y) \text{ et } (z < xy)\Big)$$

$$(b) \quad \exists a \in \mathbb{N} \quad \forall b \in \mathbb{N} \quad \Big((a \geq b) \Rightarrow (2a < b)\Big)$$

Exercice 2 - Pour chacune des phrases logiques suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, puis le démontrer :

$$(a) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \Big((n = 2) \Rightarrow (n^2 = 4)\Big)$$

$$(b) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \Big((n^2 = 4) \Rightarrow (n = 2)\Big)$$

$$(c) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad k^2 \geq n$$

$$(d) \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N \quad (-1)^n = 1$$

$$(e) \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad n = 2k + 1$$

Exercice 3 - Notons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 + 4x - 1$. Répondre aux questions suivantes, en fournissant des preuves qui consistent à revenir aux définitions. *On rappelle que l'utilisation de la dérivée est interdite.*

(a) La fonction f est-elle strictement croissante sur $[-1, 2]$?

(b) La fonction f est-elle strictement croissante sur $[-5, -4]$?

Exercice 4 - Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on rappelle que $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ est l'ensemble des réels x tels que $x \neq x_0$; autrement dit, c'est la réunion des intervalles ouverts $]-\infty, x_0[$ et $]x_0, +\infty[$. On note $g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ la fonction définie par $g(x) = \frac{3-x}{x-2}$. *On rappelle que les preuves doivent être fondées sur des définitions, et pas sur l'utilisation de théorèmes d'analyse portant sur la continuité ou la monotonie éventuelle de fonctions.*

(a) Démontrer que g est bien définie et bijective ; expliciter la bijection réciproque g^{-1}.

(b) Déterminer $g(]3,4])$. (Indication : on pourra écrire $g(x)$ sous la forme $\alpha + \frac{\beta}{x-2}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bien choisis)

Exercice 5 - Notons $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = 3 - \frac{1}{n^2+1}$. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$. *On rappelle que l'utilisation de théorèmes sur les limites (notamment le théorème d'encadrement) est interdite : il est demandé de revenir à la définition de limite.*

Exercice 6 - Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n^2 = \ell^2$. *Il est interdit dans cet exercice d'utiliser le théorème donnant la limite d'un produit ; on pourra en revanche utiliser la propriété vue en cours affirmant que toute suite convergente est bornée.*