

EXAMEN

Durée : 1 heure 30

L'élément principal d'appréciation des copies est la rigueur logique dans la réponse aux questions. Les preuves devront être fondées uniquement sur les définitions et méthodes vues en cours ce semestre, et sur des propriétés mathématiques banales (de niveau collège par exemple). L'utilisation de la notion de dérivée est notamment interdite, ainsi que l'application de théorèmes sur les limites de suites (encadrement, ...).

Exercice 1 - Ecrire la négation de chacune des phrases logiques suivantes (aucune justification n'est demandée, et on ne demande pas non plus si ces phrases sont vraies ou fausses) :

$$(a) \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \left((x = 2) \text{ ou } (y^2 \geq 3) \right)$$

$$(b) \quad \exists x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad \left((x < 3) \Rightarrow (y^2 = 8) \right)$$

Exercice 2 - Dire si chacune des phrases logiques suivantes est vraie ou fausse; aucune justification n'est demandée :

$$(a) \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad x = y^2$$

$$(b) \quad \exists x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad x = y^2$$

$$(c) \quad \exists x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad x = y^2$$

Exercice 3 - Pour chacune des phrases logiques suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, puis le démontrer :

$$(a) \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad y > 3x + 1$$

$$(b) \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad y > 3x + 1$$

$$(c) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad \left((x \geq y + 2) \Rightarrow (x^2 - 4 \geq y^2) \right)$$

$$(d) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \left((x^2 \geq y^2) \Leftrightarrow (x \geq y) \right)$$

$$(e) \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad \left((x^2 \geq y^2) \Leftrightarrow (x \geq y) \right)$$

Exercice 4 - Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_n = 2 + \frac{1}{n+1}$ vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$.

Exercice 5 - Notons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (x + 2)^2 - 1$.

(a) Démontrer que $f([1, 2]) = [8, 15]$.

(b) Déterminer $f^{-1}([0, 3])$.

(c) Démontrer que la fonction $g : [1, 2] \rightarrow [8, 15]$, $x \mapsto (x + 2)^2 - 1$ est bien définie et bijective, et expliciter sa bijection réciproque g^{-1} .