

S1 PCST, Option Math 152 — Univ. Paris-Sud, Orsay
Bases du raisonnement mathématique — 11 janvier 2017

Corrigé de l'Examen

Exercice 1 -

$$(a) \quad \exists x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad \Big((x \neq 2) \text{ et } (y^2 < 3)\Big)$$

$$(b) \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \Big((x < 3) \text{ et } (y^2 \neq 8)\Big)$$

Exercice 2 - On donne ici une preuve, même si ce n'était pas demandé dans l'énoncé.

(a) FAUSSE. Posons $x = 3$: il n'existe pas d'entier y tel que $y^2 = 3$.

(b) FAUSSE. Pour tout x on peut trouver un entier y tel que $y^2 \neq x$ (par exemple $y = 2$ convient, à moins que $x = 4$; et dans ce dernier cas on peut choisir $y = 3$).

(c) VRAIE. On peut choisir $x = 4$ et $y = 2$.

Exercice 3 -

(a) VRAIE. Soit $x \in \mathbb{N}$. Posons $y = 3x + 2$. Alors on a $y \in \mathbb{N}$ et $y > 3x + 1$.

(b) FAUSSE. Démontrons le contraire, qui est : $\forall y \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \mathbb{N} \quad y \leq 3x + 1$. Soit $y \in \mathbb{N}$. Posons $x = y$. Alors on a $y = x \leq 3x \leq 3x + 1$.

(c) VRAIE. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{N}$. Supposons que $x \geq y + 2$. Alors entre nombres positifs on peut élever au carré, d'où $x^2 \geq (y + 2)^2 = y^2 + 4y + 4 \geq y^2 + 4$. En soustrayant 4 aux deux membres on obtient $x^2 - 4 \geq y^2$.

(d) FAUSSE. Posons $x = -2$ et $y = 1$. Alors $x^2 \geq y^2$ est vraie mais $x \geq y$ est fausse, donc ces deux phrases logiques ne sont pas équivalentes.

(e) VRAIE. Posons $x = 2$ et $y = 1$. Alors $x^2 \geq y^2$ et $x \geq y$ sont vraies donc équivalentes.

Exercice 4 - Soit $\varepsilon > 0$. Posons $N = [1/\varepsilon] + 1$, de telle sorte que N est un entier et vérifie $N > 1/\varepsilon$. Soit $n \geq N$. Alors on a :

$$\Big|u_n - 2\Big| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Cela prouve que $\lim_{n\to\infty} u_n = 2$.

Exercice 5 -

(a) Soit $x \in [1,2]$. On a $3 \leq x+2 \leq 4$. En mettant ces inégalités au carré (entre nombres positifs) on obtient $9 \leq (x+2)^2 \leq 16$ d'où $f(x) \in [8,15]$. Cela démontre que $f([1,2]) \subset [8,15]$; démontrons maintenant l'inclusion réciproque. Soit $y \in [8,15]$. Alors on a $9 \leq y+1 \leq 16$ donc on peut poser $x = \sqrt{y+1} - 2$, et on a $3 \leq \sqrt{y+1} \leq 4$ donc $x \in [1,2]$. Comme $y = f(x)$ on a donc $y \in f([1,2])$, ce qui termine la preuve.

(b) Soit $x \in f^{-1}([0,3])$. On a $0 \leq (x+2)^2 - 1 \leq 3$ donc $1 \leq (x+2)^2 \leq 4$. La racine carrée de cet encadrement donne $1 \leq |x+2| \leq 2$. Distinguons deux cas selon le signe de $x+2$. Si $x+2 \geq 0$ (c'est-à-dire $x \geq -2$), on a $|x+2| = x+2$ donc $1 \leq x+2 \leq 2$ ce qui donne $x \in [-1,0]$. Dans le deuxième cas, on a $x+2 < 0$ donc $1 \leq -(x+2) \leq 2$ ce qui donne $-2 \leq x+2 \leq -1$ puis $x \in [-4,-3]$. Dans les deux cas on a $x \in [-1,0] \cup [-4,-3]$: on a démontré l'inclusion $f^{-1}([0,3]) \subset [-1,0] \cup [-4,-3]$. Pour démontrer l'inclusion réciproque, soit $x \in [-1,0] \cup [-4,-3]$. Alors on a $1 \leq |x+2| \leq 2$ (ce qu'on peut voir en distinguant deux cas selon le signe de $x+2$), donc $1 \leq (x+2)^2 \leq 4$ en mettant ces inégalités au carré (entre nombres positifs), et finalement $f(x) \in [0,3]$ donc $x \in f^{-1}([0,3])$. Cela termine la preuve du fait que $f^{-1}([0,3]) = [-1,0] \cup [-4,-3]$.

(c) Tout d'abord pour tout $x \in [1,2]$ on a $g(x) \in [8,15]$ d'après la question (a), donc g est bien définie. Soient $x \in [1,2]$ et $y \in [8,15]$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$y = (x+2)^2 - 1; \qquad y+1 = (x+2)^2; \qquad \sqrt{y+1} = x+2.$$

On a utilisé ici, pour passer de la deuxième assertion à la troisième, le fait que $x+2$ et $y+1$ sont positifs (car $x \in [1,2]$ et $y \in [8,15]$). On obtient donc :

$$y = g(x) \text{ si, et seulement si, } x = \sqrt{y+1} - 2.$$

Cela montre que g est bijective et que sa bijection réciproque g^{-1} est donnée par $g^{-1}(y) = \sqrt{y+1} - 2$ pour tout $y \in [8,15]$.