PARTIEL

Durée : 1 heure 15

L'élément principal d'appréciation des copies est la rigueur logique dans la réponse aux questions. Sauf mention explicite du contraire, toutes les réponses doivent être justifiées, c'est-à-dire accompagnées d'une preuve. Les preuves devront être fondées uniquement sur les définitions et méthodes vues en cours ce semestre, et sur des propriétés mathématiques banales (de niveau collège par exemple). L'utilisation de la notion de dérivée est notamment interdite.

Exercice 1 - Ecrire la négation de chacune des phrases logiques suivantes (aucune justification n'est demandée, et on ne demande pas non plus si ces phrases sont vraies ou fausses) :

$$(a) \quad \forall a \in \mathbb{N} \quad \exists b \in \mathbb{N} \quad \left((a \geq 2b + 1) \text{ et } (a \leq 5b) \right)$$

$$(b) \quad \exists a \in \mathbb{N} \quad \exists b \in \mathbb{N} \quad \left((a^2 = 5b) \Rightarrow (a < b) \right)$$

Exercice 2 - Pour chacune des phrases logiques suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, puis le démontrer :

$$(a) \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad y > x^2 + 1$$

$$(b) \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad y > x^2 + 1$$

$$(c) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad \left((x \geq y + 1) \Rightarrow (x^2 \geq y^2 + 1) \right)$$

$$(d) \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \left((x \geq 5y + 1) \Leftrightarrow (2x \geq y) \right)$$

$$(e) \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \left((x \geq 5y + 1) \Leftrightarrow (2x \geq y) \right)$$

Exercice 3 - Notons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3 + 2x + 1$. Répondre aux questions suivantes, en fournissant des preuves qui consistent à revenir aux définitions. *On rappelle que l'utilisation de la dérivée est interdite.*

(a) La fonction f est-elle strictement croissante sur $[1, 2]$?

(b) La fonction f est-elle décroissante sur $[-1, 0]$?

Exercice 4 - Notons $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = -2x^2 - 6x - 4$.

(a) Démontrer la phrase logique suivante :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = -2 \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 + \alpha.$$

(b) En utilisant la question (a) mais pas la notion de dérivée, démontrer que g est décroissante sur $[-\frac{3}{2}, +\infty[$.

(c) La fonction g est-elle décroissante sur $[-3, -2]$? Même question sur l'intervalle $[-2, -1]$.