S1 PCST, Option Math 152 — Univ. Paris-Sud, Orsay

Bases du raisonnement mathématique — 21 octobre 2016

Corrigé du Partiel

Exercice 1 -

(a) $\exists a \in \mathbb{N} \quad \forall b \in \mathbb{N} \quad ((a < 2b+1) \text{ ou } (a > 5b))$

(b) $\forall a \in \mathbb{N} \quad \forall b \in \mathbb{N} \quad ((a^2 = 5b) \text{ et } (a \geq b))$

Exercice 2 -

(a) VRAIE. Soit $x \in \mathbb{N}$. Posons $y = x^2+2$. On a bien $y \in \mathbb{N}$ et $y > x^2+1$.

(b) FAUSSE. Démontrons le contraire, qui est : $\forall y \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \mathbb{N} \quad y \leq x^2+1$. Soit $y \in \mathbb{N}$. Posons $x = y$. Alors on a bien $x \in \mathbb{N}$, et $y \leq y^2 = x^2 \leq x^2+1$ donc $y \leq x^2+1$.

(c) VRAIE. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{N}$. Supposons $x \geq y+1$. Alors on a $x^2 \geq (y+1)^2$ en élevant au carré entre nombres positifs, donc $x^2 \geq y^2+2y+1 \geq y^2+1$.

(d) FAUSSE. Démontrons le contraire, qui est : $\exists x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad \Big((x \geq 5y+1) \text{ et } (2x < y)\Big) \text{ ou } \Big((x < 5y+1) \text{ et } (2x \geq y)\Big)$. Posons $x = 1$ et $y = 1$; alors les phrases logiques $x < 5y+1$ et $2x \geq y$ sont vraies.

(e) VRAIE. Posons $x = 9$ et $y = 1$; alors les phrases logiques $x \geq 5y+1$ et $2x \geq y$ sont vraies, donc équivalentes.

Exercice 3 -

(a) Oui : montrons que f est strictement croissante sur $[1,2]$. Soit $x, x' \in [1,2]$. Supposons $x < x'$. Alors $x^3 < x'^3$ (en multipliant membre à membre entre nombres strictement positifs), et $2x < 2x'$, donc en additionnant il vient $f(x) < f(x')$.

(b) Non : en effet on a $f(-1) = -2$ et $f(0) = 1$, donc $f(-1) < f(0)$ avec $-1 < 0$. Donc f n'est pas décroissante sur $[-1,0]$.

Exercice 4 -

(a) Quels que soient les nombres réels x et α on a :

$$-2\Big(x+\frac{3}{2}\Big)^2 + \alpha = -2x^2 - 6x - \frac{9}{2} + \alpha$$

en développant le membre de gauche. Pour démontrer la phrase logique on pose $\alpha = \frac{1}{2}$. On a alors $-\frac{9}{2} + \alpha = -4$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a bien $-2\Big(x+\frac{3}{2}\Big)^2 + \alpha = g(x)$.

(b) Soit $x, x' \in [-\frac{3}{2}, +\infty[$. Supposons $x \leq x'$. Alors on a $0 \leq x+\frac{3}{2} \leq x'+\frac{3}{2}$. En élevant au carré entre nombres positifs, on en déduit $\Big(x+\frac{3}{2}\Big)^2 \leq \Big(x'+\frac{3}{2}\Big)^2$, d'où $-2\Big(x+\frac{3}{2}\Big)^2 \geq -2\Big(x'+\frac{3}{2}\Big)^2$ et finalement, en ajoutant α aux deux membres, $g(x) \geq g(x')$.

(c) On a $g(-3) = -18+18-4 = -4$ et $g(-2) = -8+12-4 = 0$ donc $g(-3) < g(-2)$ avec $-3 < -2$. Donc g n'est pas décroissante sur $[-3,-2]$. Par ailleurs on a $g(-3/2) = \alpha = \frac{1}{2}$ (en utilisant le calcul fait au (a) ; on aurait aussi pu faire le calcul directement). Donc $g(-2) < g(-3/2)$ avec $-2 < -3/2$: la fonction g n'est pas décroissante sur $[-2,-1]$.