Licence Sciences-Technologie-Santé **Année 2016-2017**
Faculté des sciences d'Orsay S1 PCST

Option Math 152 : Bases du raisonnement mathématique

Feuille d'exercices numéro 1

Dans les exercices 1 à 3 on considère les phrases logiques suivantes :

$$(a) \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad x \geq y^2 + 1$$

$$(b) \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad x \geq y^2 + 1$$

$$(c) \quad \exists x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad x \geq y^2 + 1$$

$$(d) \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \mathbb{N} \quad x \geq y^2 + 1$$

$$(e) \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \Big((x = 2y) \text{ ou } (x = 2y+1)\Big)$$

$$(f) \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \Big((x = 3y) \text{ ou } (x = 3y+1)\Big)$$

$$(g) \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad (x \geq y+2) \Rightarrow (x \geq y-1)$$

$$(h) \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad (x \geq y-2) \Rightarrow (x \geq y+2)$$

Exercice 1 - Dire intuitivement si chacune de ces phrases logiques est vraie ou fausse.

Exercice 2 - Ecrire la négation de chacune de ces phrases logiques.

Exercice 3 - Pour chacune de ces phrases logiques, dire si elle est vraie ou fausse et le démontrer.

Exercice 4 - Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x^2 + x + 1$.

(a) Déterminer un réel α tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $f(x) = 3(x + \frac{1}{6})^2 + \alpha$.

(b) En utilisant la question (a) mais pas la notion de dérivée, démontrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1/6]$ et strictement croissante sur $[-1/6, +\infty[$.

(c) Démontrer que la fonction f n'est pas croissante sur $[-2, -1]$ (sans utiliser la notion de dérivée ni la question précédente).

(d) Généraliser les questions (a) et (b) à toute fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

(e) Retrouver les résultats des questions (b), (c) et (d) en dérivant f.

Exercice 5 - Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{1/3\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x+1}{3x-1}$; on rappelle que $\mathbb{R} \setminus \{1/3\}$ est l'ensemble des réels x tels que $x \neq 1/3$.

(a) Déterminer un réel α strictement positif tel que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1/3\}$, on ait $f(x) = \frac{2}{3} + \frac{\alpha}{3x-1}$.

(b) En utilisant la question (a) mais pas la notion de dérivée, démontrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1/3[$ et sur $]1/3, +\infty[$.

(c) Démontrer que la fonction f n'est pas croissante sur $[1, 2]$ (sans utiliser la notion de dérivée ni la question précédente).

(d) Généraliser les questions (a) et (b) à toute fonction de la forme $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(e) Retrouver les résultats des questions (b), (c) et (d) en dérivant f.