Licence Sciences-Technologie-Santé
Faculté des sciences d'Orsay

Année 2016-2017
S1 PCST

Option Math 152 : Bases du raisonnement mathématique

Feuille d'exercices numéro 4

Exercice 1 - Notons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = |x - 2|$. Déterminer $f([3, 4])$ et $f^{-1}([0, 1])$. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 2 - Notons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ l'application qui à tout réel x associe sa partie entière $f(x)$: par définition $f(x)$ est l'unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq x < k + 1$. Par exemple on a $f(\pi) = 3$. Déterminer $f^{-1}(B)$ pour chacune des parties B suivantes : $\{3\}$; $]2, 4[$; $[2, 4]$; $\{-3\}$. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 3 - Notons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (x - 1)^2 + 3$.

- Démontrer que $f([2, 3]) = [4, 7]$.
- Déterminer $f^{-1}([7, 12])$.
- Démontrer que la fonction $g : [2, 3] \rightarrow [4, 7]$, $x \mapsto (x - 1)^2 + 3$ est bien définie et bijective.
- En s'inspirant du résultat de la question (b), exhiber une partie J de $\mathbb{R}$ telle que la fonction $h : J \rightarrow [7, 12]$, $x \mapsto (x - 1)^2 + 3$ soit bien définie et bijective. Peut-on prendre $J = f^{-1}([7, 12])$?

Exercice 4 - Notons $\mathcal{P}$ le plan usuel. Pour chacune des applications suivantes de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, dire si elle est bijective et si oui déterminer sa bijection réciproque. *Aucune preuve n'est demandée dans cet exercice, il s'agit simplement de reformuler des propriétés bien connues de géométrie.*

- La rotation de centre O et d'angle θ donné.
- L'homothétie de centre O et de rapport $k \neq 0$ donné.
- La symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ donnée.
- La projection orthogonale sur une droite Δ donnée.

Exercice 5 - Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ l'ensemble des réels x tels que $x \neq x_0$; autrement dit, c'est la réunion des intervalles ouverts $] - \infty, x_0[$ et $]x_0, +\infty[$.

- Soient x et y deux réels tels que $x \neq 3$ et $y \neq 2$. Démontrer l'équivalence suivante :

$$y = \frac{2x + 1}{x - 3} \iff x = \frac{3y + 1}{y - 2}.$$

(b) En utilisant la question précédente, démontrer que l'application

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \setminus \{3\} &\longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ x &\longmapsto \frac{2x+1}{x-3} \end{aligned}$$

est bien définie et bijective.

(c) Déterminer $g^{-1}(-5)$.

(d) Comment peut-on généraliser le résultat des questions (a) et (b) à toute fonction de la forme $g : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, et sous quelle hypothèse sur les nombres réels a, b, c, d ?

Exercice 6 - Notons $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ l'application définie comme suit : $f(n) = n/2$ si n est pair, et $f(n) = -(n+1)/2$ si n est impair. Démontrer que f est une bijection, et déterminer f^{-1} .