

EXAMEN

Durée : 2 heures

Les documents sont interdits ; les téléphones portables doivent être éteints. Les calculatrices sont autorisées à condition d'être *de type collègue*, c'est-à-dire non graphiques, non programmables et essentiellement sans mémoire.

Dans certains exercices, des résultats sont donnés en italique sous la forme suivante : *On admet que* Ces résultats peuvent être utilisés librement, et il n'est pas demandé de les justifier. En revanche, toute réponse à une question devra être précisément justifiée.

Les exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

A chaque opération sur les équations d'un système ou sur les lignes ou colonnes d'une matrice, on indiquera *explicitement* sur la copie quelle opération est effectuée. Sauf indication explicite du contraire, tous les nombres considérés sont des nombres complexes.

Exercice 1 - Déterminer les racines (réelles ou complexes) du polynôme

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + z + 5.$$

Exercice 2 - Notons M la matrice suivante :

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

On admet que les valeurs propres de M sont 2 et 3.

1. Déterminer une base du sous-espace propre $E_2(M)$ relatif à la valeur propre 2, puis une base du sous-espace propre $E_3(M)$ relatif à la valeur propre 3.
2. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 3 - Dans cet exercice on considère le système différentiel $X'(t) = AX(t)$, où A est la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}.$$

On adopte les notations suivantes :

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3, \quad V_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On admet que λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de A , et que V_1 et V_2 sont des vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 respectivement. Autrement dit, on admet les relations suivantes :

$$AV_1 = \lambda_1 V_1 \quad \text{et} \quad AV_2 = \lambda_2 V_2.$$

1. Exprimer $X(t)$ en fonction de t , à l'aide de constantes c_1 et c_2 .
2. Déterminer les valeurs de c_1 et c_2 pour lesquelles la trajectoire est rectiligne. Pour chaque trajectoire rectiligne, déterminer la limite de $X(t)$ quand $t \rightarrow -\infty$, puis quand $t \rightarrow +\infty$; donner aussi son orientation.
3. Dans un repère orthonormé (avec environ 1cm comme unité de longueur) :
 - Tracer l'allure des trajectoires (non orientées).
 - Tracer précisément (sur le même dessin) les trajectoires rectilignes déterminées à la question 2, avec leur orientation.

On s'intéresse désormais à la trajectoire qui passe par le point $(0, -3)$ à l'instant $t = 0$.

4. Calculer les valeurs de c_1 et c_2 correspondant à cette trajectoire.
5. Déterminer la position et le vecteur vitesse aux instants $t = 0$ et $t = 1$.
6. Sur un autre dessin que celui de la question 3, mais en gardant la même unité de longueur, tracer précisément cette trajectoire en faisant figurer son orientation et les vecteurs déterminés à la question 5.
7. Déterminer le comportement de cette trajectoire quand $t \rightarrow -\infty$ et quand $t \rightarrow +\infty$, en les justifiant.

Exercice 4 - Notons B la matrice suivante :

$$B = \begin{bmatrix} 2 + \frac{1}{2}i & 3 + \frac{5}{2}i & -1 + \frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}i & -1 - \frac{5}{2}i & -\frac{1}{2}i \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique de B et l'écrire, au choix, sous l'une des formes suivantes : $az^3 + bz^2 + cz + d$; $(az^2 + bz + c)(dz + e)$; $(az + b)(cz + d)(ez + f)$. En tout cas, il est demandé de calculer explicitement les valeurs de a, b, c, \dots pour la forme choisie.