

PARTIEL

Durée : 2 heures

Les documents sont interdits ; les téléphones portables doivent être éteints. Les calculatrices sont autorisées à condition d'être *de type collège*, c'est-à-dire non graphiques, non programmables et essentiellement sans mémoire.

Toute réponse devra être précisément justifiée (sauf dans l'exercice 1). Les exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

A chaque opération sur les équations d'un système ou sur les lignes ou colonnes d'une matrice, on indiquera *explicitement* sur la copie quelle opération est effectuée. Sauf indication explicite du contraire, tous les nombres considérés sont des nombres complexes.

Exercice 1 - Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée. Calculer le produit AX , avec $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ et $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Exercice 2 - Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 3 - Déterminer les racines (complexes) du polynôme $z^2 + (3 + i)z + 3i$.

Exercice 4 - Déterminer les solutions du système linéaire suivant :
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - 3y + z = -2 \end{cases}$$

Exercice 5 - Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$.

- (a) Démontrer que le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(z) = z^2 + 1$, et en déduire les valeurs propres de A .
- (b) Pour chaque valeur propre de A , déterminer une base du sous-espace propre associé.
- (c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 6 - Considérons le système suivant, dans lequel a et b sont des paramètres :

$$\begin{cases} ax - 2y = b \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

- (a) Déterminer les solutions de ce système (en distinguant si nécessaire en fonction de a et b).
- (b) En supposant $b = 0$, donner une base de solutions (on pourra distinguer en fonction de a).