S3 Chimie, Parcours Chimie — Univ. Paris-Sud, Orsay
Math 250 : Matrices et équations différentielles — 15 décembre 2015

Corrigé de l'Examen

Exercice 1 -

1. On a par définition :

$$\chi_M(z) = \det \begin{bmatrix} 1-z & 3 & 3 \\ -3 & -5-z & -3 \\ 3 & 3 & 1-z \end{bmatrix}.$$

En remplaçant L_1 par $L_1 + \frac{z-1}{3} L_3$ et simultanément L_2 par $L_2 + L_3$ on obtient :

$$\chi_M(z) = \det \begin{bmatrix} 0 & z+2 & \frac{-1}{3}z^2 + \frac{2}{3}z + \frac{8}{3} \\ 0 & -2-z & -2-z \\ 3 & 3 & 1-z \end{bmatrix}.$$

On peut factoriser la deuxième ligne par $-2-z$ ce qui donne :

$$\chi_M(z) = -(z+2)\det \begin{bmatrix} 0 & z+2 & \frac{-1}{3}z^2 + \frac{2}{3}z + \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1-z \end{bmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne on obtient alors :

$$\chi_M(z) = -3(z+2)\det \begin{bmatrix} z+2 & \frac{-1}{3}z^2 + \frac{2}{3}z + \frac{8}{3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ce qui donne

$$\chi_M(z) = -3(z+2)\Big(z+2-(\frac{-1}{3}z^2+\frac{2}{3}z+\frac{8}{3})\Big) = -(z+2)(z^2+z-2).$$

Le polynôme z^2+z-2 est de degré 2 ; son discriminant vaut $\Delta = 9$ donc ses racines sont $\frac{-1-3}{2} = -2$ et $\frac{-1+3}{2} = 1$. On a donc $\chi_M(z) = -(z+2)^2(z-1)$. Les valeurs propres de M, qui sont les racines de $\chi_M(z)$, sont donc 1 et -2.

2. Le sous-espace propre $E_1(M)$ est l'ensemble des $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ tels que $(M - I_3)X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, c'est-à-dire tels que

$$\begin{cases} 3y + 3z = 0 \\ -3x - 6y - 3z = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$$

On peut diviser toutes ces équations par 3, ce qui donne

$$\begin{cases} y+z=0 \\ -x-2y-z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

La deuxième équation se déduit des autres (c'est l'opposé de leur somme), donc on peut l'omettre. On obtient donc $x=-y$ et $z=-y$, donc $E_1(M)$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $y(-1,1,-1)$ avec $y \in \mathbb{C}$: une base de $E_2(M)$ est formée par l'unique vecteur $(-1,1,-1)$.
De même les éléments de $E_{-2}(M)$ sont les X tels que

$$\begin{cases} 3x+3y+3z=0 \\ -3x-3y-3z=0 \\ 3x+3y+3z=0 \end{cases}$$

Ces trois équations se résument à une seule ; elles signifient que x et y peuvent prendre des valeurs quelconques, et qu'on a $z=-x-y$. Les éléments de $E_{-2}(M)$ sont donc les vecteurs de la forme $(x,y,-x-y)=x(1,0,-1)+y(0,1,-1)$ avec $x,y \in \mathbb{C}$ quelconques. Une base de $E_3(M)$ est donc formée par les vecteurs $(1,0,-1)$ et $(0,1,-1)$.

3. On a $\dim E_1(M)=1$ et $\dim E_{-2}(M)=2$ d'après la question précédente, puisque la dimension d'un sous-espace propre est le nombre de vecteurs dans une base de ce sous-espace. Donc $\dim E_1(M)+\dim E_{-2}(M)$ est égal à 3, qui est la taille de la matrice : M est donc diagonalisable.

Exercice 2 -

1. Comme N est de taille 3 et possède trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.
2. Les éléments de $E_{3-i}(N)$ sont les solutions du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} (4-2i)x+(5+i)y+(2+3i)z=0 \\ (-2+8i)x+(-5+3i)y+(-4-i)z=0 \\ (-4+6i)x+(-5+5i)y-5z=0 \end{cases}$$

En remplaçant L_1 par $L_1+\frac{2+3i}{5}L_3$ et simultanément L_2 par $L_2+\frac{-4-i}{5}L_3$, on arrive après simplifications au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{-6+10i}{5}x=0 \\ \frac{12+20i}{5}x=0 \\ (-4+6i)x+(-5+5i)y-5z=0 \end{cases}$$

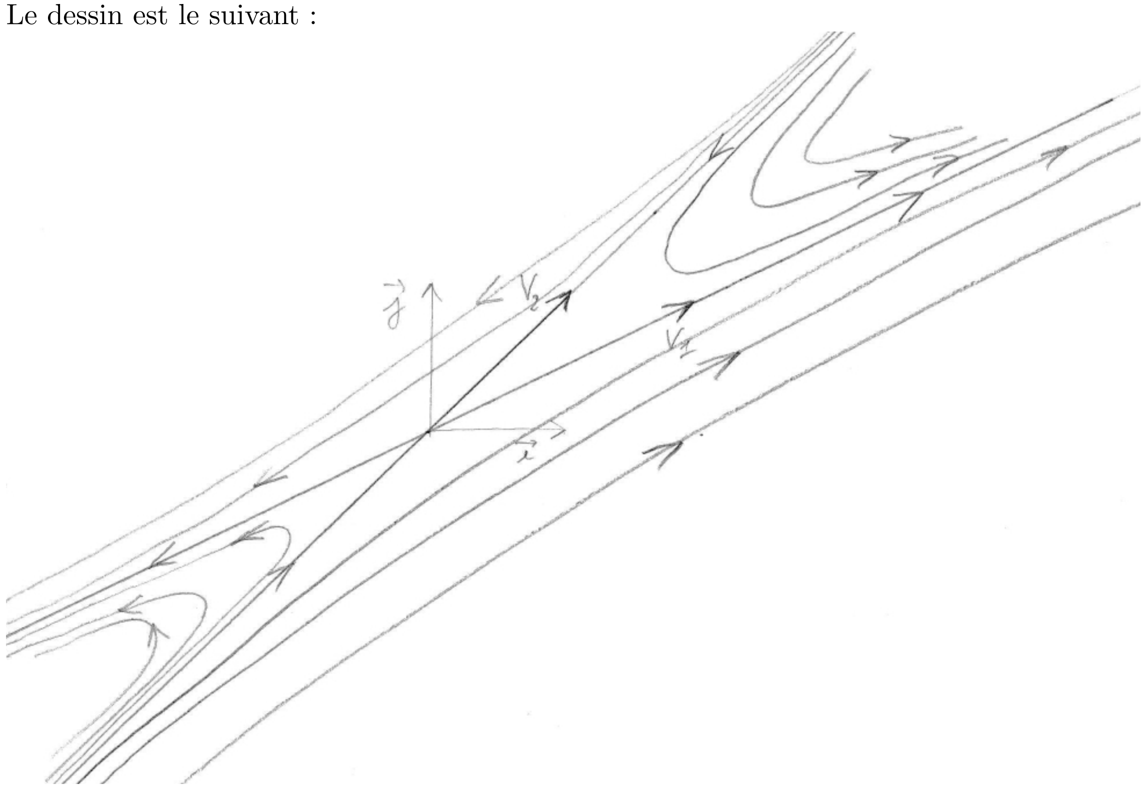
Les solutions sont donc les triplets (x,y,z) tels que $x=0$ et $z=(-1+i)y$; autrement dit, ce sont les triplets de la forme $y(0,1,-1+i)$ avec $y \in \mathbb{C}$. Donc l'unique vecteur $(0,1,-1+i)$ forme une base de $E_{3-i}(N)$.

Exercice 3 -

1. Comme λ_1 et λ_2 sont réels et distincts, on a
$$X(t) = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. La trajectoire est rectiligne si, et seulement si, c_1 ou c_2 est nul. On exclut le cas où $c_1 = c_2 = 0$ car la trajectoire est alors réduite à un point (l'origine). Si $c_1 = 0$ et $c_2 \neq 0$, on a $X(t) = c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ donc la trajectoire est la demi-droite issue de l'origine et dirigée par le vecteur $c_2 V_2 = \begin{bmatrix} c_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$. Quand $t \to -\infty$ on a $e^{-t} \to +\infty$ donc la trajectoire part de l'infini ; elle va vers 0 car $X(t) \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ quand $t \to +\infty$.
   Lorsque $c_2 = 0$ et $c_1 \neq 0$, on a $X(t) = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ donc la trajectoire est la demi-droite issue de l'origine et dirigée par le vecteur $c_1 V_1 = \begin{bmatrix} 2c_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$. Quand $t \to -\infty$ on a $e^{2t} \to 0$ donc la trajectoire part de l'origine ; elle va vers l'infini car $e^{2t} \to +\infty$ quand $t \to +\infty$.

3. Le dessin est le suivant :



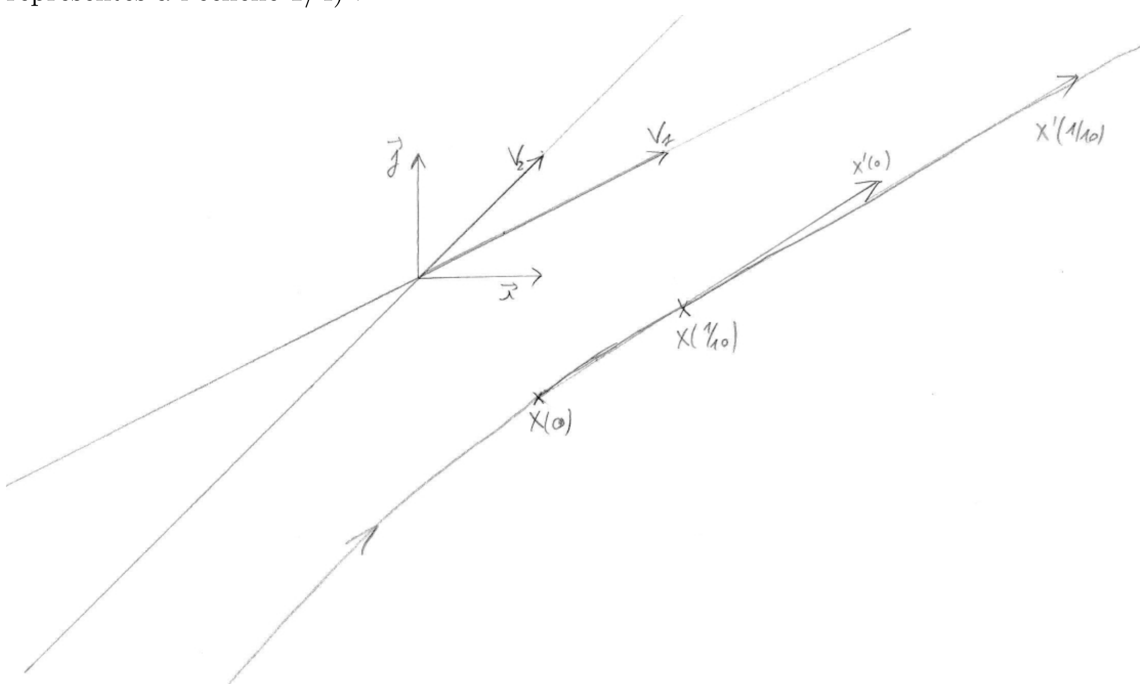
4. On a $x(t) = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$ et $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$ donc $x(0) = 2c_1 + c_2$ et $y(0) = c_1 + c_2$. La trajectoire cherchée est donc celle donnée par les constantes c_1 et c_2 telles que $2c_1 + c_2 = 1$ et $c_1 + c_2 = -1$. En soustrayant la deuxième équation de la première on obtient $c_1 = 2$; en reportant dans la seconde on trouve alors $c_2 = -3$.

5. On a $x(t) = 4e^{2t} - 3e^{-t}$ et $y(t) = 2e^{2t} - 3e^{-t}$ donc $x'(t) = 8e^{2t} + 3e^{-t}$ et $y'(t) = 4e^{2t} + 3e^{-t}$ ce qui donne

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad X(1/10) = \begin{bmatrix} 4e^{1/5} - 3e^{-1/10} \\ 2e^{1/5} - 3e^{-1/10} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2,17 \\ -0,27 \end{bmatrix},$$

$$X'(0) = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad X'(1/10) = \begin{bmatrix} 8e^{1/5} + 3e^{-1/10} \\ 4e^{1/5} + 3e^{-1/10} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 12.48 \\ 7.60 \end{bmatrix}.$$

6. Le dessin est le suivant (l'orientation étant fournie par les vecteurs vitesse, qui sont ici représentés à l'échelle 1/4) :



7. Quand $t \to -\infty$ on a $e^{2t} \to 0$ et $e^{-t} \to +\infty$; on en déduit $X(t) \sim e^{-t} \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$, et $X(t) - e^{-t} \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ tend vers $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. La demi-droite issue de l'origine et dirigée par le vecteur $\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} = -3V_2$ est donc asymptote à la courbe quand $t \to -\infty$.

Quand $t \to +\infty$, on a $e^{-t} \to 0$ et $e^{2t} \to +\infty$. On en déduit $X(t) \sim e^{2t} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, et $X(t) - e^{2t} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$ tend vers $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. La demi-droite issue de l'origine et dirigée par le vecteur $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2V_1$ est donc asymptote à la courbe quand $t \to +\infty$.