

CORRIGÉ DU PARTIEL

Exercice 1 - Notons δ le déterminant cherché. En remplaçant L_1 par $L_1 - 2L_2$ on obtient

$$\delta = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne on en déduit :

$$\delta = -\det \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

On peut alors remplacer L_3 par $L_3 + 2L_1$ puis développer par rapport à la troisième colonne :

$$\delta = -\det \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = -6.$$

Exercice 2 - Posons $z = 2 + 2i\sqrt{3}$. On a $|z| = \sqrt{4+12} = 4$ donc $z = 4e^{i\theta}$, en notant θ l'argument de z (défini à l'addition près d'un multiple de 2π). Cela donne $e^{i\theta} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\theta = \pi/3$. Une racine carrée de z est donc $\delta = \sqrt{|z|}e^{i\theta/2} = 2e^{i\pi/6} = \sqrt{3} + i$.

Exercice 3 - On voit que -1 est une racine évidente de P . Par identification ou par division euclidienne, on trouve :

$$P(z) = (z+1)Q(z) \text{ avec } Q(z) = z^2 - (3i+1)z + (2i-2).$$

Le discriminant du polynôme Q est $\Delta = (3i+1)^2 - 4(2i-2) = -2i = 2e^{-i\pi/2}$. Une racine carrée de Δ est donc $\delta = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} = 1-i$. Les racines de Q sont donc données par la formule $\frac{1}{2}((3i+1) \pm (1-i))$; on trouve $2i$ et $i+1$, qui avec la racine évidente -1 sont donc les trois racines de P .

Exercice 4 - En remplaçant L_2 par $L_2 + 2L_1$ et L_3 par $L_3 + 3L_1$ on obtient le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} -x - 3y + 2z = 4 \\ -5y + 3z = 1 \\ -10y + 8z = 6 \end{cases}$$

On peut diviser L_3 par 2 puis lui soustraire L_2 , ce qui donne $z = 2$. En remplaçant z par sa valeur dans L_2 on obtient $y = \frac{3z-1}{5} = 1$ puis grâce à L_1 : $x = -3y + 2z - 4 = -3$.

Exercice 5 -

(a) On obtient $AX = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(b) Le polynôme caractéristique $\chi_A(z)$ est le déterminant de la matrice $\begin{bmatrix} 1-z & -1 \\ 1 & 3-z \end{bmatrix}$, qui est $(1-z)(3-z) + 1 = z^2 - 4z + 4$. Son discriminant vaut 0, et il admet 2 pour unique racine (ce qu'on aurait pu voir en remarquant la factorisation $\chi_A(z) = (z-2)^2$). L'unique valeur propre de A est donc 2.

(c) Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2 est l'ensemble des solutions du système linéaire

$$\begin{cases} -x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Ces deux équations sont proportionnelles ; les solutions sont les couples $(x, y) = (x, -x)$ avec $x \in \mathbb{C}$ quelconque, ce qui donne une base du sous-espace propre formée par l'unique vecteur $(1, -1)$. On peut aussi écrire les solutions sous la forme $(-y, y)$ avec $y \in \mathbb{C}$ quelconque, ce qui donne une autre base du sous-espace propre : le vecteur $(-1, 1)$.

(d) La matrice A n'est pas diagonalisable, car l'unique sous-espace propre est de dimension 1 alors que A est de taille 2.

(e) En (a) on a vu que $AX = 2X$, donc X est un vecteur propre associé à la valeur propre 2. Il appartient bien au sous-espace propre déterminé à la question (c), et en forme même une base.

Exercice 6 -

(a) En remplaçant L_1 par $L_1 - 3L_2$ on obtient le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} (a-5)x = -3b \\ 2x + y = b \end{cases}$$

Si $a \neq 5$, on en déduit $x = \frac{-3b}{a-5}$ puis $y = -\frac{a+1}{3}x = \frac{b(a+1)}{a-5}$. Il y a donc une et une seule solution dans ce cas.

Si $a = 5$, la première équation est $0 = -3b$. Si $b \neq 0$, il n'y a aucune solution. Si $b = 0$, cette équation est toujours vérifiée, et les solutions sont les couples (x, y) de la forme $(x, -2x)$ avec $x \in \mathbb{C}$ quelconque ; on peut aussi écrire ces couples sous la forme $(\frac{-y}{2}, y)$ avec $y \in \mathbb{C}$ quelconque. Il y a donc une infinité de solutions dans ce cas.

On peut calculer le déterminant la matrice du système de départ : il vaut $a - 5$, ce qui est cohérent avec la distinction faite entre les cas $a = 5$ et $a \neq 5$.

(b) Si $a \neq 5$, la seule solution est $(x, y) = (0, 0)$ donc la base de solutions est vide. Si $a = 5$, une base de solutions est formée par le vecteur $(1, -2)$. Une autre base est formée par le vecteur $(\frac{-1}{2}, 1)$.