EXAMEN

Durée : 2 heures

Les documents sont interdits ; les téléphones portables doivent être éteints. Les calculatrices sont autorisées à condition d'être *de type collège*, c'est-à-dire non graphiques, non programmables et essentiellement sans mémoire.

Dans certains exercices, des résultats sont donnés en italique sous la forme suivante : *On admet que . . .*. Ces résultats peuvent être utilisés librement, et il n'est pas demandé de les justifier. En revanche, toute réponse à une question devra être précisément justifiée.

Les exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

A chaque opération sur les équations d'un système ou sur les lignes ou colonnes d'une matrice, on indiquera *explicitement* sur la copie quelle opération est effectuée. Sauf indication explicite du contraire, tous les nombres considérés sont des nombres complexes.

Exercice 1 - Notons M la matrice suivante :

$$M = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M , et en déduire que les valeurs propres de cette matrice sont -1 et -3 .
2. Déterminer une base du sous-espace propre $E_{-1}(M)$ relatif à la valeur propre -1 , puis une base du sous-espace propre $E_{-3}(M)$ relatif à la valeur propre -3 .
3. La matrice M est-elle diagonalisable ? *On rappelle que toute réponse doit être justifiée.*

Exercice 2 - Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Suite au verso.

Exercice 3 - Pour que cet exercice puisse être traité avec n'importe quelle calculatrice de type collègue, on rappelle que l'exponentielle d'un nombre réel a s'écrit e^a , avec $e \approx 2,718$. Le tableau suivant regroupe, parmi d'autres, les valeurs qui sont utiles dans cet exercice :

Valeur de a	-1	-3/4	-1/2	-1/4	0
Valeur approchée de e^a	0,368	0,472	0,607	0,779	1

On considère le système différentiel $X'(t) = AX(t)$, où A est la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

On adopte les notations suivantes :

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -4, \quad V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On admet que λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de A , et que V_1 et V_2 sont des vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 respectivement. Autrement dit, on admet les relations suivantes :

$$AV_1 = \lambda_1 V_1 \quad \text{et} \quad AV_2 = \lambda_2 V_2.$$

1. Exprimer $X(t)$ en fonction de t , à l'aide de constantes c_1 et c_2 .
2. Déterminer les valeurs de c_1 et c_2 pour lesquelles la trajectoire est rectiligne. Pour chaque trajectoire rectiligne, déterminer la limite de $X(t)$ quand $t \rightarrow -\infty$, puis quand $t \rightarrow +\infty$; donner aussi son orientation.

Dans les questions 3 à 6, on s'intéresse à la trajectoire qui passe par le point $(3, -1)$ à l'instant $t = 0$.

3. Calculer les valeurs de c_1 et c_2 correspondant à cette trajectoire.
4. Déterminer la position et le vecteur vitesse aux instants $t = 0$ et $t = 1/4$.
5. Déterminer le comportement de cette trajectoire quand $t \rightarrow -\infty$ et quand $t \rightarrow +\infty$.
6. Tracer cette trajectoire dans un repère orthonormé (avec environ 1cm comme unité de longueur), en faisant figurer son orientation et les vecteurs déterminés à la question 4. *Aucune justification n'est demandée.*
7. Dans cette question on ne s'intéresse plus seulement à la trajectoire qui passe par le point $(3, -1)$ à l'instant $t = 0$, mais à toutes les trajectoires; *aucune justification n'est demandée.* Sur un autre dessin que celui de la question 6, mais en gardant la même unité de longueur :
 - Tracer l'allure des trajectoires (non orientées).
 - Tracer précisément (sur le même dessin) les trajectoires rectilignes déterminées à la question 2, avec leur orientation.

Exercice 4 - Déterminer les solutions (complexes) du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x + (-1 + i)y = 1 - i \\ (2 + i)x + (1 - 2i)y = 4 + 2i \end{cases}$$