S3 Chimie, Parcours Chimie — Univ. Paris-Sud, Orsay
Math 250 : Matrices et équations différentielles — 13 décembre 2016

# Corrigé de l'Examen

**Exercice 1 -**

1. On a par définition :

$$\chi_M(z) = \det \begin{bmatrix} -5-z & 2 & -2 \\ 0 & -2-z & -1 \\ 4 & -3 & -z \end{bmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne on obtient :

$$\begin{aligned} \chi_M(z) &= (-5-z)\det\begin{bmatrix} -2-z & -1 \\ -3 & -z \end{bmatrix} + 4\det\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2-z & -1 \end{bmatrix} \\ &= (-5-z)(z^2+2z-3)+4(-6-2z) \\ &= -z^3-7z^2-15z-9. \end{aligned}$$

On voit que $-1$ est une racine évidente de ce polynôme (d'autant plus évidente que l'énoncé affirme que c'est une valeur propre de $M$). Il existe donc des réels $a$, $b$, $c$ tels que $\chi_M(z) = (z+1)(az^2+bz+c)$. On détermine ces coefficients par identification ou par division euclidienne ; on trouve $\chi_M(z) = (z+1)(-z^2-6z-9)$. On peut alors calculer le discriminant du trinôme obtenu pour trouver ses racines : on trouve $\Delta = 0$, et $-3$ comme racine double. On peut aussi constater directement que $-z^2-6z-9 = -(z+3)^2$. En tout cas les valeurs propres de $M$ sont $-1$ et $-3$.

2. Le sous-espace propre $E_{-1}(M)$ est l'ensemble des $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ tels que $(M+I_3)X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, c'est-à-dire tels que

$$\begin{cases} -4x+2y-2z=0 \\ -y-z=0 \\ 4x-3y+z=0 \end{cases}$$

En remplaçant $L_3$ par $L_3+L_1$ on obtient

$$\begin{cases} -4x+2y-2z=0 \\ -y-z=0 \\ -y-z=0 \end{cases}$$

donc $z$ peut prendre une valeur quelconque, et $x$, $y$ sont donnés par $y=-z$ et $x = \frac{1}{4}(2y-2z) = -z$. Le sous-espace propre $E_{-1}(M)$ est donc l'ensemble des vecteurs de la forme $z(-1,-1,1)$ avec $z \in \mathbb{C}$ : une base de $E_{-1}(M)$ est formée par l'unique vecteur $(-1,-1,1)$.

De même les éléments de $E_{-3}(M)$ sont les $X$ tels que

$$\begin{cases} -2x + 2y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ 4x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

En remplaçant $L_3$ par $L_3 + 2L_1$ on obtient

$$\begin{cases} -2x + 2y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

donc $z$ peut prendre une valeur quelconque, et $x$, $y$ sont donnés par $y = z$ et $x = \frac{1}{2}(2y - 2z) = 0$. Le sous-espace propre $E_{-3}(M)$ est donc l'ensemble des vecteurs de la forme $z(0, 1, 1)$ avec $z \in \mathbb{C}$ : une base de $E_{-3}(M)$ est formée par l'unique vecteur $(0, 1, 1)$.

3. On a $\dim E_{-1}(M) = 1$ et $\dim E_{-3}(M) = 1$ d'après la question précédente, puisque la dimension d'un sous-espace propre est le nombre de vecteurs dans une base de ce sous-espace. Donc $\dim E_{-1}(M) + \dim E_{-3}(M) = 2$, alors que la matrice $M$ est de taille 3 : $M$ n'est pas diagonalisable.

**Exercice 2 -** En effectuant les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \longleftarrow L_4 - L_1$ puis en développant par rapport à la deuxième colonne on obtient :

$$\det N = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

On peut alors remplacer $C_2$ par $C_2 - C_1$, et $C_3$ par $C_3 - C_1$, puis développer par rapport à la troisième ligne ce qui donne :

$$\det N = -\det \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = +\det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = 2 + 6 = 8.$$

**Exercice 3 -**

1. Comme $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont réels et distincts, on a

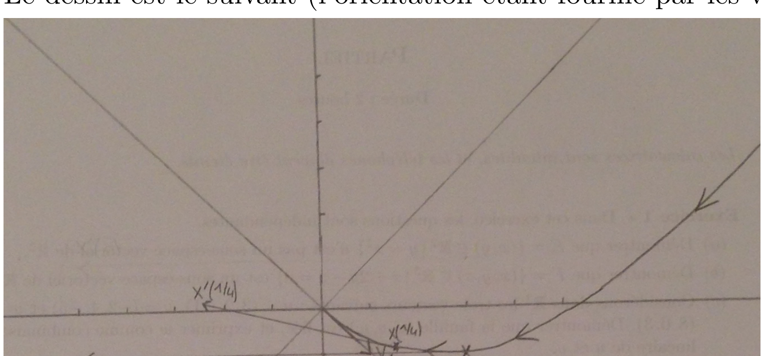
$$X(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. La trajectoire est rectiligne si, et seulement si, $c_1$ ou $c_2$ est nul. On exclut le cas où $c_1 = c_2 = 0$ car la trajectoire est alors réduite à un point (l'origine). Si $c_1 = 0$ et $c_2 \neq 0$, on a $X(t) = c_2 e^{-4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ donc la trajectoire est la demi-droite issue de l'origine et dirigée par le vecteur $c_2 V_2 = \begin{bmatrix} c_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$. Quand $t \to -\infty$ on a $e^{-4t} \to +\infty$ donc la trajectoire part de l'infini ; elle va vers 0 car $X(t) \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ quand $t \to +\infty$.

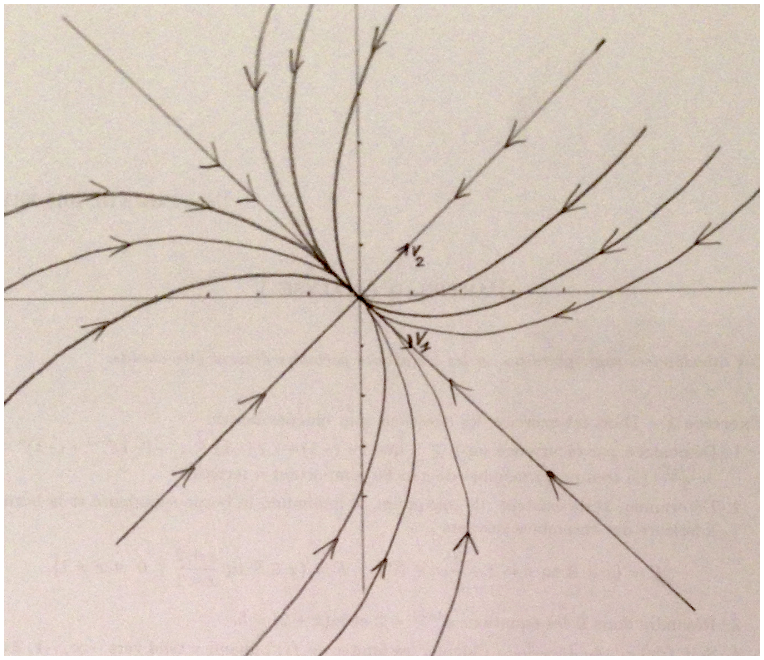
Lorsque $c_2 = 0$ et $c_1 \neq 0$, on a $X(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ donc la trajectoire est la demi-droite issue de l'origine et dirigée par le vecteur $c_1 V_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ -c_1 \end{bmatrix}$. Quand $t \to -\infty$ on a $e^{-2t} \to +\infty$ donc la trajectoire part de l'infini ; elle va vers l'origine car $e^{-2t} \to 0$ quand $t \to +\infty$.

3. On a $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}$ et $y(t) = -c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}$ donc $x(0) = c_1 + c_2$ et $y(0) = -c_1 + c_2$. La trajectoire cherchée est donc celle donnée par les constantes $c_1$ et $c_2$ telles que $c_1 + c_2 = 3$ et $-c_1 + c_2 = -1$. En additionnant ces deux équations on obtient $c_2 = 1$ ; en reportant dans la première on trouve alors $c_1 = 2$.
4. On a $x(t) = 2e^{-2t} + e^{-4t}$ et $y(t) = -2e^{-2t} + e^{-4t}$ donc $x'(t) = -4e^{-2t} - 4e^{-4t}$ et $y'(t) = 4e^{-2t} - 4e^{-4t}$ ce qui donne
$$X(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad X(1/4) = \begin{bmatrix} 2e^{-1/2} + e^{-1} \\ -2e^{-1/2} + e^{-1} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1,58 \\ -0,85 \end{bmatrix},$$
$$X'(0) = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad X'(1/4) = \begin{bmatrix} -4e^{-1/2} - 4e^{-1} \\ 4e^{-1/2} - 4e^{-1} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -3,90 \\ 0,95 \end{bmatrix}.$$
5. Quand $t \to -\infty$, $e^{-2t}$ et $e^{-4t}$ tendent vers $+\infty$, et $e^{-2t}$ est négligeable devant $e^{-4t}$. Donc on a $X(t) \approx e^{-4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ : la trajectoire présente une branche parabolique de direction la demi-droite issue de l'origine engendrée par $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Cette branche parabolique n'est pas une asymptote car $X(t) - e^{-4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ne tend pas vers 0.

   Lorsque $t$ tend vers $+\infty$, $e^{-2t}$ et $e^{-4t}$ tendent vers 0 donc la trajectoire va vers l'origine. Comme $e^{-4t}$ est négligeable devant $e^{-2t}$, on a $X(t) \approx 2e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ donc le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ est tangent à la trajectoire en l'origine.
6. Le dessin est le suivant (l'orientation étant fournie par les vecteurs vitesse) :




7. L'allure générale des trajectoires est la suivante (avec les orientations de toutes les trajectoires, même si ce n'était pas demandé dans l'énoncé) :



**Exercice 4 -** En remplaçant $L_2$ par $L_2 - \frac{2+i}{2}L_1$ on obtient :

$$\begin{cases} 2x + (-1+i)y = 1 - i \\ (\frac{5}{2} - \frac{5}{2}i)y = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}i \end{cases}$$

La deuxième équation permet de calculer $y$. On peut voir directement que $y = i$, ou bien calculer l'inverse de $\frac{5}{2} - \frac{5}{2}i = \frac{5}{2}(1-i)$ ; c'est $\frac{2}{5}\frac{1}{1-i} = \frac{2}{5}\frac{1+i}{2} = \frac{1+i}{5}$ (en appliquant la formule générale $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$ valable pour tous réels $a$ et $b$, dès que $a + ib \neq 0$). On a alors $y = \frac{1+i}{5}(\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i) = i$. En remplaçant dans la première équation on trouve $x = \frac{1}{2}(1-i-(-1+i)i) = 1$. Donc le système proposé admet une et une seule solution, qui est le couple $(x, y) = (1, i)$.