

PARTIEL

Durée : 2 heures

Les documents sont interdits ; les téléphones portables doivent être éteints. Les calculatrices sont autorisées à condition d'être *de type collège*, c'est-à-dire non graphiques et essentiellement sans mémoire.

Toute réponse devra être précisément justifiée (sauf dans la question (a) de l'exercice 4). Les exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

A chaque opération sur les équations d'un système ou sur les lignes ou colonnes d'une matrice, on indiquera *explicitement* sur la copie quelle opération est effectuée. Sauf indication explicite du contraire, tous les nombres considérés sont des nombres complexes.

Exercice 1 -

(a) Déterminer les solutions du système linéaire suivant :
$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ -x + y + 2z = 6 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

(b) Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) En connaissant le résultat de la question (b), comment aurait-on pu prévoir le nombre de solutions du système résolu à la question (a) ?

Exercice 2 - Déterminer *une base de solutions* du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -x + (3 - i)y + z = 0 \\ (-1 - i)x + (4 + 2i)y + (1 + i)z = 0 \\ ix + (-1 - 3i)y - iz = 0 \end{cases}$$

Exercice 3 -

(a) Déterminer une racine carrée de $5 + 12i$.

(b) Déterminer les racines du polynôme $P(z) = z^3 + (1 + \sqrt{5})z^2 + (-3i + \sqrt{5})z - 3i$. *Indication : on pourra, à un moment donné du calcul, utiliser le résultat de la question (a).*

Suite au verso.

Exercice 4 - Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

- (a) Calculer le produit AX , avec $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Aucune justification n'est demandée.*
- (b) Déterminer le polynôme caractéristique de A , et en déduire que les valeurs propres de A sont 1 et -2 .
- (c) Pour chaque valeur propre de A , déterminer une base du sous-espace propre associé.
- (d) La matrice A est-elle diagonalisable ?
- (e) Comment peut-on relier les résultats des questions (a) et (c) ?

Exercice 5 - Déterminer les solutions du système suivant, dans lequel a et b sont des paramètres :

$$\begin{cases} ax + y = a \\ 4x + ay = b \end{cases}$$