

CORRIGÉ DU PARTIEL

Exercice 1 -

(a) En remplaçant L_2 par $L_2 + L_1$ on obtient :

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ -y + 2z = 11 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Ensuite on additionne L_2 et L_3 , ce qui donne $3z = 12$ donc $z = 4$. En reportant dans L_2 on obtient $y = 2z - 11 = -3$ puis, en reportant dans L_1 , $x = 5 + 2y = -1$. Finalement, le système admet une unique solution : $(x, y, z) = (-1, -3, 4)$.

(b) En remplaçant L_2 par $L_2 + L_1$ on voit que

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On développe ce déterminant par rapport à la première colonne, ce qui donne

$$\det A = +1 \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1 - 2 = -3.$$

(c) On voit que A est la matrice des coefficients du système linéaire (S) de la question (a). Comme $\det A = -3 \neq 0$, ce système est de Cramer : il admet une et une seule solution.

Exercice 2 - Pour effectuer le pivot de Gauss on remplace L_2 par $L_2 + (-1 - i)L_1$ et L_3 par $L_3 + iL_1$. Or ces deux nouvelles lignes sont de la forme $0 = 0$, suite au fait que $(4 + 2i) + (-1 - i)(3 - i) = 0$ et $-1 - 3i + i(3 - i) = 0$. Le système est donc équivalent à sa première ligne L_1 . Les solutions sont données par $x = (3 - i)y + z$ avec y et z quelconques. Une base de solutions est donc formée par les deux vecteurs $(3 - i, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$.

Exercice 3 -

(a) Notons $\delta = x + iy$ une racine carrée de $5 + 12i$. Comme $\delta^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi = 5 + 12i$, on a :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 & (L_1) \\ 2xy = 12 & (L_2) \end{cases}$$

En outre on a $|\delta|^2 = |\delta^2| = |5 + 12i| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ d'où :

$$x^2 + y^2 = 13. \quad (L_3)$$

En additionnant (L_1) et (L_3) on obtient $x^2 = \frac{5+13}{2} = 9$; en les soustrayant on a $y^2 = \frac{13-5}{2} = 4$. En outre (L_2) montre que x et y sont de même signe. En choisissant $x > 0$ on obtient donc $x = 3$ et $y = 2$, ce qui donne $\delta = 3 + 2i$.

- (b) On voit que -1 est une racine évidente de P , car $P(-1) = (-1) + (1 + \sqrt{5}) - (-3i + \sqrt{5}) - 3i = 0$. Par identification ou par division euclidienne, on obtient $P(z) = (z+1)(z^2 + \sqrt{5}z - 3i)$. Le trinôme $z^2 + \sqrt{5}z - 3i$ a un discriminant Δ égal à $5 + 12i$, donc d'après la question (a) on peut prendre $\delta = 3 + 2i$ comme racine carrée de Δ . Les racines de ce trinôme sont donc $\frac{-\sqrt{5}+3+2i}{2}$ et $\frac{-\sqrt{5}-3-2i}{2}$. Avec en outre -1 , ce sont les trois racines de P .

Exercice 4 -

- (a) Le calcul donne $AX = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = X$.
- (b) Le polynôme caractéristique $\chi_A(z)$ est le déterminant de la matrice $\begin{bmatrix} -z & 2 \\ 1 & -1-z \end{bmatrix}$, qui est $-z(-1-z) - 2 = z^2 + z - 2$. Son discriminant vaut 9, et il admet $\frac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1$ et $\frac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2$ pour racines ; ce sont donc les valeurs propres de A .
- (c) Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1 est l'ensemble des solutions du système linéaire $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ dont les deux équations sont proportionnelles. Les solutions sont les couples $(x, y) = (2y, y)$ avec $y \in \mathbb{C}$ quelconque, ce qui donne une base du sous-espace propre formée par l'unique vecteur $(2, 1)$. On peut aussi écrire les solutions sous la forme $(x, x/2)$ avec $x \in \mathbb{C}$ quelconque, ce qui donne une autre base du sous-espace propre : le vecteur $(1, 1/2)$.
- De même, le sous-espace propre de A associé à la valeur propre -2 est l'ensemble des solutions du système linéaire $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ dont les deux équations sont proportionnelles. Les solutions sont les couples $(x, y) = (-y, y)$ avec $y \in \mathbb{C}$ quelconque, ce qui donne une base du sous-espace propre formée par l'unique vecteur $(-1, 1)$. On peut aussi écrire les solutions sous la forme $(x, -x)$ avec $x \in \mathbb{C}$ quelconque, ce qui donne une autre base du sous-espace propre : le vecteur $(1, -1)$.
- (d) La matrice A est diagonalisable, car elle est de taille 2 et admet deux valeurs propres distinctes. On peut aussi calculer la somme des dimensions des sous-espaces propres, qui vaut $1 + 1 = 2$ donc est égale à la taille de A .
- (e) A la question (a) on a vu que $AX = X$, ce qui signifie que X appartient à l'espace propre associé à la valeur propre 1. Or on a justement déterminé une base de ce sous-espace à la question (c), et on voit immédiatement que X appartient bien à cet espace propre.

Exercice 5 - La première équation donne $y = a - ax$; en reportant dans la seconde on obtient $4x + a(a - ax) = b$ ce qui s'écrit sous la forme :

$$(4 - a^2)x = b - a^2. \quad (1)$$

Si $a^2 \neq 4$ (c'est-à-dire $a \neq 2$ et $a \neq -2$), alors on obtient $x = \frac{b-a^2}{4-a^2}$ puis $y = a - a\frac{b-a^2}{4-a^2} = \frac{4a-ab}{4-a^2} = \frac{a(4-b)}{4-a^2}$; le système a une et une seule solution dans ce cas.

Si $a^2 = 4$ (c'est-à-dire $a = 2$ ou $a = -2$), l'équation (1) s'écrit $0 = b - a^2$. Si $b \neq a^2$ (c'est-à-dire $b \neq 4$), le système n'a aucune solution. En revanche, si $b = 4$, x peut prendre une valeur quelconque et y est alors donné par $y = a - ax$. Autrement dit, les solutions sont alors les couples $(x, y) = (x, a - ax)$.