Licence Sciences-Technologie-Santé
Faculté des sciences d'Orsay

Année 2016-2017
S3 Chimie, Parcours Chimie

Module Math 250 : Matrices et équations différentielles

Feuille d'exercices numéro 2

Déterminants et racines de polynômes

Exercice 1 - Calculer les déterminants des matrices suivantes. Le nombre i est celui des nombres complexes ; les lettres $a, b, c, \dots$ désignent des paramètres complexes.

$$(a) \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1+i & 2i \\ -1 & 1-i \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} a+1 & a \\ a & a-1 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 2-i & 3 \\ -1+i & 2-3i \end{bmatrix}$$

$$(e) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad (f) \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad (g) \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (h) \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ -1 & a & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(i) \begin{bmatrix} -1+2i & 3-i & i \\ 2 & 1-i & 1 \\ 0 & 2-3i & -i \end{bmatrix} \quad (j) \begin{bmatrix} -3i & 1 & 0 \\ 0 & 2+i & -3 \\ -1+2i & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (k) \begin{bmatrix} 0 & -1+2i & 1 \\ 1 & -2-i & 0 \\ -1 & 1+i & -2 \end{bmatrix}$$

$$(l) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 12 & 0 \end{bmatrix} \quad (m) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad (n) \begin{bmatrix} 0 & a & -a & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ a & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & a & -1 \end{bmatrix}$$

$$(o) \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (p) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & e \\ 0 & c & f & g \\ d & h & j & k \end{bmatrix} \quad (q) \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 2 - Reprendre certains des systèmes linéaires de l'exercice 1 du T.D. 1 (parmi ceux ayant autant d'équations que d'inconnues) ; calculer le déterminant de la matrice du système, et vérifier la relation vue en cours entre sa nullité et le nombre de solutions du système.

Exercice 3 - Considérons les nombres complexes suivants :

$$z_1 = -1 + 2i, \quad z_2 = -2 + 3i, \quad z_3 = 3 - i, \quad z_4 = -2i.$$

Représenter, dans le plan muni d'un repère orthonormal, les points $M_1, \dots, M_4$ d'affixes respectives $z_1, \dots, z_4$. Calculer les expressions suivantes :

$$(a) 2z_1 + iz_2; \quad (b) z_1^2 - z_2^2; \quad (c) z_1z_3 + iz_4; \quad (d) (z_1 + z_2)(z_1 - z_2).$$

Que remarque-t-on en comparant (b) et (d) ?

Exercice 4 - Posons

$$z_1 = -1 + i, \quad z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}, \quad z_3 = -1 + i\sqrt{3}, \quad z_4 = 3i.$$

- (a) Calculer le module et l'argument de $z_1, \dots, z_4$.
 (b) Représenter, dans le plan muni d'un repère orthonormal, les points $M_1, \dots, M_4$ d'affixes respectives $z_1, \dots, z_4$; on rappelle que $\sqrt{2} \approx 1,4$ et $\sqrt{3} \approx 1,7$. Vérifier ainsi géométriquement la cohérence des résultats de la question (a), et en donner éventuellement une nouvelle preuve.
 (c) En utilisant le module et l'argument des nombres complexes considérés, déterminer les nombres complexes suivants (et donner leur partie réelle et leur partie imaginaire) :

$$z_1z_2; \quad z_3^3; \quad \frac{z_2}{z_4^2}; \quad \frac{1}{z_3z_4}.$$

- (d) Déterminer une racine carrée de chacun des nombres complexes $z_1, \dots, z_4$; exprimer ces racines carrées en donnant leur module et leur argument, puis (pour z_3 et z_4 seulement) en donnant leur partie réelle et leur partie imaginaire.

Exercice 5 - Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants (sans essayer de les représenter par module et argument) :

$$(a) 3 + 4i \quad (b) -8 - 6i$$

Exercice 6 - Déterminer les racines (complexes) des polynômes suivants :

$$(a) z^2 + (i - 5)z + 8 - i \quad (b) 2z^2 - (2 + 5i)z - 2 + i \quad (c) 3z^2 + (9i - 7)z + (2 - 3i)$$

$$(d) 6z^3 - 31z^2 + 31z + 14 \quad (e) 2z^3 + 3z^2 - 8z + 3 \quad (f) 3z^3 + (5 - 4i)z^2 + (1 - 6i)z - 2i - 1$$

$$(g) 6z^4 - 17z^3 - 5z^2 + 37z - 21 \quad (h) z^4 + (1 - i)z^3 - (1 + 4i)z^2 + (1 - i)z + 6i - 2$$