

Licence Sciences-Technologie-Santé
Faculté des sciences d'Orsay

Année 2016-2017
S3 Chimie, Parcours Chimie

Module Math 250 : Matrices et équations différentielles

Feuille d'exercices numéro 3

Valeurs propres et vecteurs propres

Exercice 1 - Déterminer les racines (complexes) des polynômes suivants (en fonction du paramètre complexe a le cas échéant) :

(a) $z^3+(2+i-a)z^2+(-3+2i-2a)z+(3a-3i)$ $\quad$ (b) $z^4+(5-i)z^3+(8-8i)z^2+(4-12i)z$

(c) $z^4-(2+i)z^2-(3-i)z-2+2i$

Exercice 2 - Soit $n \geq 2$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ tels que $z^n = 1$. Les éléments de $\mathbb{U}_n$ s'appellent les *racines n-ièmes de l'unité*.

(a) Déterminer le module et l'argument des éléments de $\mathbb{U}_n$; en déduire que $\mathbb{U}_n$ a exactement n éléments. Représenter géométriquement, dans le plan muni d'un repère orthonormé, les points ayant pour affixes les racines n-ièmes de l'unité (pour n compris entre 2 et 6). Que peut-on dire du polygone formé par ces n points ?

(b) Soit $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ un nombre complexe non nul, avec $r_0 > 0$ et $\theta_0 \in \mathbf{R}$. Déterminer en fonction de r_0 et θ_0 les nombres complexes z tels que $z^n = z_0$, et démontrer qu'il y en a exactement n. Dans le cas particulier où z_0 est réel, combien y a-t-il de tels z dans $\mathbf{R}$? (on pourra distinguer selon la parité de n et le signe de z_0)

Exercice 3 - Calculer le polynôme caractéristique de chacune des matrices A suivantes, et en déduire ses valeurs propres (complexes). Pour chacune d'entre elles, déterminer ensuite une base du sous-espace propre $E_\lambda(A)$ associé. La matrice A est-elle diagonalisable ?

(a) $\begin{bmatrix} 9 & -10 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad$ (d) $\begin{bmatrix} 5 & 3i \\ 8i & -6 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} -4 & 6 & 6 \\ -5 & 9 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{bmatrix}$ $\quad$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad$ (g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ (i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ (j) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$(k)\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & 7 & 3 \\ -6 & 6 & 4 \end{bmatrix} \qquad (\ell)\ \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 4 - Calculer le polynôme caractéristique de chacune des matrices A suivantes, et en déduire ses valeurs propres (complexes). Pour chacune d'entre elles, déterminer ensuite une base du sous-espace propre $E_\lambda(A)$ associé. La matrice A est-elle diagonalisable ?

$$(a)\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (c)\ \begin{bmatrix} -1-i & -i & -i \\ -i & -1-i & -i \\ -i & -i & -1-i \end{bmatrix}$$

$$(d)\ \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{bmatrix} \qquad (e)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (f)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(g)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad (h)\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 5 - Calculer le polynôme caractéristique de chacune des matrices A suivantes, et en déduire ses valeurs propres (complexes). Pour chacune d'entre elles, déterminer ensuite une base du sous-espace propre $E_\lambda(A)$ associé. La matrice A est-elle diagonalisable ?

$$(a)\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 12 & -12 & 20 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & -6 \end{bmatrix} \qquad (c)\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2i+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2i \end{bmatrix}$$

$$(d)\ \begin{bmatrix} 2i+4 & 2i+4 & 1 \\ -2i-3 & -2i-3 & -1 \\ 2i+3 & 2i+2 & 0 \end{bmatrix} \qquad (e)\ \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad (f)\ \begin{bmatrix} i & 3i & 1 \\ 0 & -2i+1 & 2 \\ 0 & 0 & -2i+1 \end{bmatrix}$$

$$(g)\ \begin{bmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -1 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad (h)\ \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$