Feuille d'exercices numéro 3

Valeurs propres et vecteurs propres

Exercice 1

(a) 1, -3, $a - \mathrm{i}$.
(b) 0, -2, $2\,\mathrm{i}$ et $-3-\mathrm{i}$.
(c) -1, 2, i et $-1-\mathrm{i}$.

Exercice 2

(a) $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble des $z = e^{2ik\pi/n}$ avec k entier compris entre 0 et $n-1$. Les points ayant ces affixes forment un polygone régulier de centre 0 (segment, triangle équilatéral, carré, pentagone régulier, hexagone régulier pour $n = 2, \ldots, 6$).
(b) Ce sont les $z = \sqrt[n]{r_0}e^{i(\theta_0+2k\pi)/n}$ avec k entier compris entre 0 et $n-1$. Quand z_0 est réel et n impair, ce nombre complexe z est réel pour une et une seule valeur de k. En revanche, si n est pair, tout dépend du signe de z_0 : si $z_0 > 0$ il y a deux valeurs réelles, alors que si $z_0 < 0$ il n'y en a aucune.

Dans les exercices qui suivent, les bases de $E_\lambda(A)$ ne sont jamais uniques. On peut multiplier chaque vecteur par un nombre non nul, et on obtient une autre base. Par exemple, si le corrigé indique $\left\{\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}\right\}$, les réponses $\left\{\begin{bmatrix}1\\3/5\end{bmatrix}\right\}$ et $\left\{\begin{bmatrix}5/3\\1\end{bmatrix}\right\}$ sont correctes elles aussi (elles sont obtenues en multipliant la réponse de l'énoncé par $1/5$ et $1/3$, respectivement). Quand la base est formée d'au moins deux vecteurs, des combinaisons linéaires plus compliquées sont possibles aussi.

Exercice 3

Toutes les matrices de cet exercice sont diagonalisables.

(a) $\chi_A(z) = z^2 - 7\,z + 12$
$\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3$
base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}\right\}$

(b) $\chi_A(z) = (4-z)^2 - 4$
$\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 2$
base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\right\}$

(c) $\chi_A(z) = z^2 - 5\,z - 14$
$\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 2$
base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}-5\\4\end{bmatrix}\right\}$

(d) $\chi_A(z) = z^2 + z - 6$
$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$
base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}-\mathrm{i}\\1\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}-3\,\mathrm{i}\\8\end{bmatrix}\right\}$

(e) $\chi_A(z) = -z^3 + z^2 + 2\,z$
$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$
base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_3}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

(f) $\chi_A(z) = -(1-z)(3-z)(1+z)$
$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -1$
base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}5\\2\\0\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_3}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}3\\2\\8\end{bmatrix}\right\}$

(g) $\chi_A(z) = (1-z)\big[(1-z)^2+1\big]$
$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1+\mathrm{i}$, $\lambda_3 = 1-\mathrm{i}$
base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}\mathrm{i}\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_3}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}-\mathrm{i}\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

(h) $\chi_A(z) = -(1-z)(3-z)(1+z)$
$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -1$
base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_3}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

(i) $\chi_A(z) = -z(1-z)(2-z)$
$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$

base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_3}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

(*j*) $\chi_A(z) = -(z-1)(z-2)(1+z)$
$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$
base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_3}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

(*k*) $\chi_A(z) = -z^3 + 12\,z^2 - 12\,z - 80$
$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = 4$
base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_3}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

(ℓ) $\chi_A(z) = z(z^2+z-2)(z-5)$
$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$, $\lambda_4 = 5$
base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$,
base de $E_{\lambda_3}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_4}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$

Exercice 4 Toutes les matrices de cet exercice sont diagonalisables.

(*a*) $\chi_A(z) = (2-z)(1-z)^2$
$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$
base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

(*b*) $\chi_A(z) = -z^3 + 2\,z^2 - z$
$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$
base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\right\}$

(*c*) $\chi_A(z) = -z^3 - (3+3\,\mathrm{i})\,z^2 - (3+6\,\mathrm{i})\,z - 1 - 3\,\mathrm{i}$
$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1 - 3\,\mathrm{i}$
base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

(*d*) $\chi_A(z) = -z^3 + z^2 + z - 1$
$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$
base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}1/3\\-2/3\\1\end{bmatrix}\right\}$

(*e*) $\chi_A(z) = (1-z)^2(z^2+1)$
$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \mathrm{i}$, $\lambda_3 = -\,\mathrm{i}$
base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}0\\-\,\mathrm{i}\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$,
base de $E_{\lambda_3}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}0\\\mathrm{i}\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

(*f*) $\chi_A(z) = (1-z)^2(z^2-2)$
$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$, $\lambda_3 = -\sqrt{2}$
base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}\sqrt{2}/2\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$,
base de $E_{\lambda_3}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}-\sqrt{2}/2\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

(*g*) $\chi_A(z) = -(2-z)^2(2+z)(3-z)$
$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$
base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$,

base de $E_{\lambda_3}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}$

(h) $\chi_A(z) = (1+z)^3(2+z)(1-z)$
$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$

base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$,

base de $E_{\lambda_3}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$

Exercice 5 Aucune matrice de cet exercice n'est diagonalisable.

(a) $\chi_A(z) = (3-z)^2$
$\lambda_1 = 3$

base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$

(b) $\chi_A(z) = -z^3 + 7\,z^2 - 16\,z + 12$
$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$

base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}-8\\-1\\3\end{bmatrix}\right\}$

(c) $\chi_A(z) = (1+z)\big(-z^2 - (2-2\,\mathrm{i})z - 1 + 2\,\mathrm{i}\big)$
$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1 + 2\,\mathrm{i}$

base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}2-\mathrm{i}\\-\mathrm{i}\\0\end{bmatrix}\right\}$

(d) $\chi_A(z) = -z^3 + z^2 + z - 1$
$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

(e) $\chi_A(z) = (4-z)^3$
$\lambda_1 = 4$

base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

(f) $\chi_A(z) = (\mathrm{i} - z)(1 - 2\,\mathrm{i} - z)^2$
$\lambda_1 = \mathrm{i}$, $\lambda_2 = 1 - 2\,\mathrm{i}$

base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}-9+3\,\mathrm{i}\\10\\1\end{bmatrix}\right\}$

(g) $\chi_A(z) = -z^3 + z^2 + z - 1$
$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$

(h) $\chi_A(z) = -(2+z)^3(1-z)$
$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$

base de $E_{\lambda_1}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$, base de $E_{\lambda_2}(A)$: $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}$