

Module Math 250 : Matrices et équations différentielles

Feuille d'exercices numéro 4

Systèmes différentiels

Pour chacune des matrices A suivantes, on considère le système différentiel $X'(t) = AX(t)$.

1. Exprimer $X(t)$ en fonction de t , à l'aide de constantes c_i . Si ces constantes prennent des valeurs quelconques, obtient-on toujours une solution de ce système différentiel ? (Dans le cas où on n'en obtient une que sous certaines conditions portant sur les c_i , on ne demande pas de déterminer ces conditions)
2. Tracer, dans un repère orthonormé, l'allure des trajectoires (non orientées).
3. Déterminer les valeurs éventuelles des constantes c_i pour lesquelles la trajectoire est rectiligne ; tracer précisément ces trajectoires, en indiquant et en justifiant leur orientation.

On s'intéresse désormais à la trajectoire qui passe par le point $(1, -1)$ à l'instant $t = 0$.

4. Calculer les valeurs des constantes c_i correspondant à cette trajectoire.
5. Déterminer la position et le vecteur vitesse aux instants $t = -1$, $t = 0$ et $t = 1$.
6. Tracer précisément cette trajectoire (sur un autre dessin que celui de la question 2), en faisant figurer son orientation et les vecteurs de la question précédente.
7. Déterminer le comportement de cette trajectoire quand $t \rightarrow +\infty$ et quand $t \rightarrow -\infty$, en les justifiant.

$$(a) \begin{bmatrix} 8/3 & 2/3 \\ 1/3 & 7/3 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 12 & -5 \end{bmatrix}$$

$$(e) \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ -4 & 11 \end{bmatrix} \quad (f) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \quad (g) \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \quad (h) \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(i) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (j) \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \quad (k) \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \quad (\ell) \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(m) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (n) \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad (o) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$