Retour TP 8 – Résultants

▶ **Prérequis** : *Chapitre 7 du poly.*

Commandes Sage

Si P et Q sont deux polynômes, on peut calculer leur résultant par rapport à la variable t avec la commande `P.resultant(Q,t)` : il est fortement conseillé de rappeler que la variable est t.
Pour tracer des courbes, utiliser `parametric_plot` et `implicit_plot`.
La fonction pour convertir une expression en un nombre flottant à 100 chiffres significatifs (par exemple) est la suivante : `N(...,digits=100)`.

1 Polynôme minimal

1.-2. On utilise le fait que si P est le polynôme minimal de a et Q celui de b alors $\mathrm{Res}_Y(P(Y), Q(X-Y))$ est un polynôme annulateur de $a+b$, $\mathrm{Res}_Y(P(Y), Y^{\deg(Q)}Q(X/Y))$ est un polynôme annulateur de ab et que

$$\mathrm{Res}_Y(P(Y), X - Y^5) = \prod_{\substack{\alpha \\ P(\alpha)=0}} (X - \alpha^5).$$

Soit $\theta \in \mathbf{Q}$ un entier algébrique et $a \in \mathbf{Q}[\theta]$. On cherche à trouver le polynôme minimal de a sur $\mathbf{Q}$ connaissant a en fonction de θ et le polynôme minimal de θ sur $\mathbf{Q}$.

4. Il est clair que la multiplication par θ a pour matrice C_P la matrice compagnon de P et que la multiplication par θ^i la matrice C_P^i si bien qu'on en déduit immédiatement que la matrice cherchée n'est autre que $H(C_P)$. On sait que P est scindé à racines simples sur son corps de décomposition et donc quitte à diagonaliser C_P sur ce corps de décomposition, on obtient immédiatement que

$$\chi_{H(C_P)}(X) = \prod_{P(\alpha)=0} (X - H(\alpha)) = \mathrm{Res}_Y(P(Y), X - H(Y)).$$

5. Soit P_a le polynôme minimal de a, disons de degré q. On a alors $\mathbf{Q}(a) = \mathbf{Q}[X]/(P_a)$ et $(1, \ldots, a^{q-1}) = (y_1, \ldots, y_q)$ est une $\mathbf{Q}$-base de $\mathbf{Q}(a)$. Soit $(1, \ldots, z_r)$ une base de $\mathbf{Q}(\theta)$ sur $\mathbf{Q}(a)$. Ainsi, $n = qr$ et $(y_i z_j)$ est une $\mathbf{Q}$-base de $\mathbf{Q}(\theta)$. Soit C_{P_a} la matrice compagnon de P_a autrement dit la matrice de la multiplication par a dans $\mathbf{Q}(a)$ dans la base $(y_1, \ldots, y_q)$. On a alors

$$a y_i = \sum_h m_{jh} y_h$$

soit

$$a \times z_j y_i = \sum_h m_{jh} y_h z_j.$$

En ordonnant lexicographiquement la base $(y_i z_j)$, on obtient que la matrice de la question précédente dans la base $(y_i z_j)$ est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux égaux à C_{P_a}. Ainsi

$$\chi_{H(C_P)}(X) = \chi_{C_{P_a}}^r = P_a^r$$

où $r = [\mathbf{Q}(\theta) : \mathbf{Q}(a)]$.

2 Enveloppe d'une courbe

Soit $\mathcal{F}$ une famille de courbes algébriques à un paramètre réel t, autrement dit pour tout réel t, on se donne un polynôme $F_t \in \mathbf{R}[X,Y]$ dépendant de manière lisse de t et on considère la courbe donnée par $F_t(x,y) = 0$. L'enveloppe de $\mathcal{F}$ est l'ensemble des points (x,y) vérifiant

$$\exists t \in \mathbf{R}, \quad F_t(x,y) = 0, \quad \frac{\partial F_t(x,y)}{\partial t} = 0.$$

1. L'enveloppe est alors une courbe tangente en chacun de ses points à une courbe de la famille.
2. L'équation différentielle suivante
$$y = xy' - \frac{y'^2}{4}$$
admet $y(x) = a + bx$ comme solution si, et seulement si, $a + \frac{b^2}{4} = 0$.
3. On obtient $y = x^2$ dont on vérifie qu'elle est solution de l'équation de Clairaut.

3 Élimination

Soit un triangle ABC de côtés de longueurs $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ dans un repère orthonormé. On note $\mathcal{S}$ l'aire du triangle et H le pied de la hauteur issue de A, $h = AH$ et $x = BH$.

1. On obtient immédiatement

$$\begin{cases} p := (a-x)^2 + h^2 - b^2 = 0 \\ q := x^2 + h^2 - c^2 = 0 \\ r := ah - 2\mathcal{S} = 0. \end{cases}$$

   On cherche alors à éliminer x et y, ce que l'on peut faire à l'aide de résultants.

4 Méthode de Newton

Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^∞. Soit $x \in \mathbf{R}$. On définit une suite réelle (x_n) par récurrence en posant $x_0 = x$, et pour $n \in \mathbf{N}$, en notant x_{n+1} l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente en $(x_n, f(x_n))$ à la courbe d'équation $y = f(x)$ (on supposera que la tangente n'est pas horizontale).

1. On obtient immédiatement

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

2. Il suffit de passer à la limite dans la question précédente. On peut même être plus précis en terme de vitesse de convergence mais pour cela je vous renvoie à la littérature, c'est un sujet très classique.