TP 8 : RÉSULTANTS

►**PRÉREQUIS** : *Chapitre 6 du poly.*

Commandes Sage

Si P et Q sont deux polynômes, on peut calculer leur résultant par rapport à la variable t avec la commande `P.resultant(Q,t)` : il est fortement conseillé de rappeler que la variable est t.
Pour tracer des courbes, utiliser `parametric_plot` et `implicit_plot`.
La fonction pour convertir une expression en un nombre flottant à 100 chiffres significatifs (par exemple) est la suivante : `N(...,digits=100)`.

1 Fonction résultant

Implémenter à partir des résultats du cours une fonction qui prend en argument deux polynômes en 2 variables et qui renvoie leur résultant. Quelle est la complexité de cet algorithme ?

2 Une courbe paramétrée

On considère la courbe paramétrée suivante, avec $t \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} x(t) &= t^3 + t^2 \\ y(t) &= t - t^3 \end{cases}$$

1. Montrer que $t \longmapsto (x(t), y(t))$ est un paramétrage régulier (c'est-à-dire que $x'(t)$ et $y'(t)$ ne s'annulent pas simultanément).
2. Représenter graphiquement la courbe pour $-1,2 \leq t \leq 1,2$.
3. Déterminer une équation cartésienne de la courbe.
4. Représenter graphiquement la courbe en utilisant l'équation cartésienne obtenue à la question précédente.

3 Intersection de courbes planes

1. Écrire une fonction prenant en entrée deux polynômes P et Q en deux variables et fournissant en sortie leurs points d'intersection.
2. Déterminer les points d'intersection à coordonnées rationnelles de la courbe plane d'équation $y^2 = x^3 + 2x + 1$ et du cercle de centre $(3, 11)$ et de rayon 13.
3. Trouver les points d'intersection réels des ellipses $X^2 - XY + Y^2 - 1 = 0$ et $2X^2 + Y^2 - Y - 2 = 0$. Même question avec $XY = 1$ et $XY = 0$. Tracer les courbes.

4 Polynôme minimal

1. Calculer le polynôme minimal de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ et de $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{2}$.
2. Soit $P = X^4 + X + 1 = \prod_{i=1}^{4}(X-\alpha_i)$. Calculer $\prod_{i=1}^{4}(X-\alpha_i^5)$.

Soit $\theta \in \mathbf{Q}$ un entier algébrique et $a \in \mathbf{Q}[\theta]$. On cherche à trouver le polynôme minimal de a sur $\mathbf{Q}$ connaissant a en fonction de θ et le polynôme minimal de θ sur $\mathbf{Q}$.

1. Écrire une fonction qui renvoie un polynôme unitaire irréductible de degré n sur $\mathbf{Z}$. On notera θ une racine de P et on considère $a = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\theta^i$ et on notera $H = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ avec a_i des variables formelles rationnelles.
2. Écrire la matrice de la multiplication par a dans $\mathbf{Q}[\theta] = \mathbf{Q}[X]/(P)$. Calculer son polynôme caractéristique et le comparer au résultant en Y de $P(Y)$ et de $X - H(Y)$.
3. Montrer que $\mathrm{Res}_Y(P(Y), X - H(Y))$ est une puissance du polynôme minimal de a sur $\mathbf{Q}$. Illustrer cela sur un exemple concret où ils ne sont pas égaux.
Indication : On pourra considérer la tour d'extensions $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Q}[a] \subseteq \mathbf{Q}[\theta]$.

5 Enveloppe d'une courbe

Soit $\mathcal{F}$ une famille de courbes algébriques à un paramètre réel t, autrement dit pour tout réel t, on se donne un polynôme $F_t \in \mathbf{R}[X,Y]$ dépendant de manière lisse de t et on considère la courbe donnée par $F_t(x,y) = 0$. L'enveloppe de $\mathcal{F}$ est l'ensemble des points (x,y) vérifiant

$$\exists t \in \mathbf{R}, \quad F_t(x,y) = 0, \quad \frac{\partial F_t(x,y)}{\partial t} = 0.$$

1. En admettant que l'enveloppe est une courbe, donner une interprétation géométrique de l'enveloppe.
2. Calculer l'enveloppe de la famille suivante en faisant à chaque fois un graphique contenant quelques courbes de la famille et le tracé de l'enveloppe
$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad F_t(X,Y) = X^2 + (Y-t)^2 - \frac{1+t^2}{2}.$$
Idem pour $3tX - 2Y = t^3$.
3. L'équation différentielle suivante
$$y = xy' - \frac{y'^2}{4}$$
est appelée équation de Clairaut. Déterminer tout les polynômes linéaires solutions.
4. Déterminer l'enveloppe de ces droites et la donner sous la forme d'une équation $y = \varphi(x)$. Vérifier alors que φ est solution de l'équation de Clairaut.

6 Élimination

Soit un triangle ABC de côtés de longueurs $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ dans un repère orthonormé. On note $\mathcal{S}$ l'aire du triangle et H le pied de la hauteur issue de A, $h = AH$ et $x = BH$.

1. Faire un dessin et trouver une équation polynomiale reliant $\mathcal{S}$, a et h puis deux équations polynomiales reliant a, b, c, h et x.
2. En déduire la formule de Héron
$$\mathcal{S}^2 = \frac{1}{16}(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c).$$

7 Méthode de Newton

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^∞. Soit $x \in \mathbf{R}$. On définit une suite réelle (x_n) par récurrence en posant $x_0 = x$, et pour $n \in \mathbf{N}$, en notant x_{n+1} l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente en $(x_n, f(x_n))$ à la courbe d'équation $y = f(x)$ (on supposera que la tangente n'est pas horizontale).

1. Donner une formule pour x_{n+1} en fonction de x_n, f, f'.
2. Démontrer que si (x_n) converge vers un nombre x_∞ tel que $f'(x_\infty) \neq 0$, alors $f(x_\infty) = 0$.
3. Écrire une fonction qui prend en argument une fonction f, un nombre (réel) x et un entier N, et renvoie le premier x_n de la suite tel que $|f(x_n)| \leq 10^{-N}$ s'il en existe (et ne termine pas s'il n'existe pas de tel n).
4. Utiliser cette fonction pour déterminer des valeurs approchées de π et de $\sqrt{2}$ à 10^{-42} près. Observer empiriquement qu'"en gros" le nombre de chiffres corrects double à chaque itération. On pourra notamment tracer le nombre de chiffres corrects en fonction du nombre d'itérations.