

Calcul Formel - Master 1 - Univ. Paris-Saclay

Chapitre 3

①

I Algorithme du Pivot de Gauss

A matrice à m lignes et p colonnes, à coefficients dans un corps \mathbb{K} .

Def: Deux matrices sont dites équivalentes par lignes si on peut passer de l'une à l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes: $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow aL_i$, $L_i \leftarrow L_i + aL_j$.
 $a \in \mathbb{K}^*$ $a \in \mathbb{K}, i \neq j$

Def: A est dite échelonnée réduite (en lignes) si:

- 1) Les éventuelles lignes nulles de A sont les dernières.
- 2) Dans chaque ligne non nulle, le 1^{er} élément non nul (en partant de la gauche) vaut 1; on l'appelle pivot.
- 3) Chaque pivot est situé plus à droite que celui de la ligne précédente.
- 4) Dans la colonne de chaque pivot, tous les autres coefficients sont nuls.

Th: Toute matrice A est équivalente par lignes à une et une seule matrice échelonnée réduite.

$$m \begin{cases} \begin{matrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{cases} \quad p$$

Th: L'algorithme du pivot de Gauss permet de mettre A sous forme échelonnée réduite en $O(mpr)$ opérations arithmétiques dans \mathbb{K} avec $m =$ nombre de lignes de A; $p =$ nombre de colonnes de A; $r =$ rang de A.

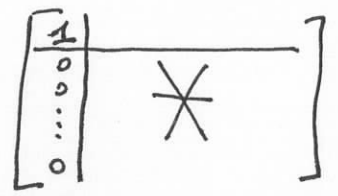
Corollaire: $O(mp \min(m, p))$ opérations. A retenir: si A carrée de taille m , $O(m^3)$ opérations.

Rappel: le rang de A est le nombre de pivots de la matrice échelonnée réduite associé à A.

Preuve: 1^{ère} étape: si $a_{11} \neq 0$, on fait
 Chaque étape correspond à un pivot dans la matrice échelonnée réduite qu'on obtient.

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1 \text{ pour tout } i \in [2, n]: O(np) \text{ opérations dans } \mathbb{K}.$$

$O(p)$ opérations dans \mathbb{K}



II Applications à l'algèbre linéaire.

On suppose désormais $n=p$, $A \in M_n(\mathbb{K})$.
 Par l'algorithme du pivot de Gauss, on peut en $O(n^3)$ opérations arithmétiques dans \mathbb{K} :
 Résoudre $AX=Y$ avec $Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ fixé: Solution particulière, Base de solutions si $Y=0$.

- ⊗ Trouver une base de $\text{Ker } A$.
- ⊗ Trouver un système d'équations linéaires de $Y=0$: on cherche $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tq. $\forall \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in Y=0, \sum_{i=1}^n a_i y_i = 0$.
- ⊗ Trouver le rang de A (nb de pivots).
- ⊗ Calculer $\det A$ (Δ varie au cours de l'algorithme: il faut suivre cette variation en effectuant l'algorithme).
- ⊗ Calculer l'inverse de A (si A est inversible).

Δ Par développement: si u_n est le coût du calcul d'un déterminant pour une matrice de taille n par cette méthode alors $u_n = n u_{n-1} + O(n)$
 d'où $u_n \approx n!$. Enorme.

NB: Δ dans tout ce chapitre les coefficients de A sont dans un corps \mathbb{K} .
 Si $A \in M_n(\mathbb{Z})$ ou $A \in M_n(\mathbb{K}[X])$ cet algorithme fait passer dans \mathbb{Q} ou $\mathbb{K}(X)$.