Calcul Formel - Master 1 - Univ. Paris-Saclay
Chapitre 3

I Algorithme du Pivot de Gauss

A matrice à n lignes et p colonnes, à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$.

Déf : Deux matrices sont dites équivalentes par lignes si on peut passer de l'une à l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes : $L_i \rightleftarrows L_j$, $\underset{a\in\mathbb{K}^*}{L_i \leftarrow aL_i}$, $\underset{a\in\mathbb{K},\, i\neq j}{L_i \leftarrow L_i + aL_j}$.

Déf : A est dite échelonnée réduite (en lignes) si :

1) Les éventuelles lignes nulles de A sont les dernières.
2) Dans chaque ligne non nulle, le 1^{er} élément non nul (en partant de la gauche) vaut 1 ; on l'appelle pivot.
3) Chaque pivot est situé plus à droite que celui de la ligne précédente.
4) Dans la colonne de chaque pivot, tous les autres coefficients sont nuls.

Th : Toute matrice A est équivalente par lignes à une et une seule matrice échelonnée réduite.

$$n\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{p}\right.$$

Th : L'algorithme du pivot de Gauss permet de mettre A sous forme échelonnée réduite en $O(npr)$ opérations arithmétiques dans $\mathbb{K}$

avec n = nombre de lignes de A ; p = nombre de colonnes de A ; r = rang de A.

Corollaire : $O(np\min(n,p))$ opérations.

A retenir : si A carrée de taille n, $O(n^3)$ opérations.

Rappel : le rang de A est le nombre de pivots de la matrice échelonnée réduite associée à A.

Preuve : 1è étape : si $a_{11} \neq 0$, on fait $\underbrace{L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1}_{O(p) \text{ opérations dans } \mathbb{K}}$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$: $O(np)$ opérations dans $\mathbb{K}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & \ast \\ 0 & \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{bmatrix}$$

Chaque étape correspond à un pivot dans la matrice échelonnée réduite qu'on obtient.

II Applications à l'algèbre linéaire.

On suppose désormais $n = p$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Par l'algorithme du pivot de Gauss, on peut en $O(n^3)$ opérations arithmétiques dans $\mathbb{K}$:

- Résoudre $AX = Y$ avec $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ fixé : Solution particulière, Base de Solutions si $Y = 0$.
- Trouver une base de $\operatorname{Ker} A$.
- Trouver un système d'équations linéaires de $\operatorname{Im} A$: on cherche $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tq. $\forall \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} A$ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0$.
- Trouver le rang de A (nb de pivots).
- Calculer $\det A$ (⚠ varie au cours de l'algorithme : il faut suivre cette variation en effectuant l'algorithme).
- Calculer l'inverse de A (si A est inversible).

⚠ Par développement : si u_n est le coût du calcul d'un déterminant pour une matrice de taille n par cette méthode alors $u_n = n u_{n-1} + O(n)$ d'où $u_n \approx n!$ Enorme.

NB : ⚠ dans tout ce chapitre les coefficients de A sont dans un corps $\mathbb{K}$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ ou $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$ cet algorithme fait passer dans $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{K}(X)$.