Examen d'Arithmétique

Mardi 11 avril 2023. 3 heures.

Documents, calculatrices, montres connectées et téléphones interdits.

Exercice 1 On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Soit x un réel ≥ 3, on considère les deux ensembles

$$\mathcal{E}(x) := \{p \in \mathcal{P}, 3 \leq p \leq x, \left(\frac{60}{p}\right) = 1\}$$

et

$$\mathcal{F}(x) := \{p \in \mathcal{P}, 3 \leq p \leq x, p \pmod{343} \text{ engendre } (\mathbb{Z}/(343\mathbb{Z}))^\times\}.$$

a. Caractériser les nombres premiers impairs $p \leq x$ dans $\mathcal{E}(x)$ par une relation de congruence, puis donner un équivalent asymptotique du cardinal de $\mathcal{E}(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

b. Mêmes questions pour l'ensemble $\mathcal{F}(x)$.

c. Donner un équivalent asymptotique de la somme

$$\sum_{p \in \mathcal{E}(x) \cap \mathcal{F}(x)} \frac{1}{\sqrt{p}}$$

pour x tendant vers l'infini.
Indication : appliquer le lemme de sommation par parties avec la fonction différentiable $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, et utiliser une intégration par parties.

Exercice 2 a. Vérifier que le développement en fraction continue de $\sqrt{13}$ est de la forme

$$\sqrt{13} = [a_0; \overline{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5}],$$

avec $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

b. Donner toutes les valeurs de $\xi = x + y\sqrt{13}$ correspondant aux solutions de l'équation

$$x^2 - 13y^2 = 1, \tag{1}$$

où les inconnues x et y sont des entiers ≥ 1.

c. Donner toutes les valeurs de $\xi = x + y\sqrt{13}$ correspondant aux solutions de l'équation

$$x^2 - 13y^2 = -1,$$

où les inconnues x et y sont des entiers ≥ 1.

d. Chaque solution entière de (1) avec $x, y \geq 1$ étant écrite sous la forme $\xi = x + y\sqrt{13}$, quel est le cardinal de l'ensemble

$$\{\xi; \xi \text{ solution de } (1), 1 \leq \xi \leq 10^{10}\}?$$

On donne les valeurs approchées de $\sqrt{13} = 3,60555\ldots$ et du logarithme $\log_{10}(36,02775\ldots) = 1,55663\ldots$

Exercice 3 Soit $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-31})$ et soit $\mathcal{O}_K$ l'anneau d'entiers correspondant.

a. En utilisant sans les redémontrer les résultats du cours, donner le discriminant de K (sur $\mathbb{Q}$) et déterminer $\omega \in \mathcal{O}_K$ tel qu'on ait l'égalité

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cdot \omega.$$

b. A quel groupe bien connu le groupe de classes d'idéaux de $\mathcal{O}_K$ est-il isomorphe ?

c. Soit

$$I := 2 \cdot \mathbb{Z} \oplus \left(\frac{1+\sqrt{-31}}{2}\right) \cdot \mathbb{Z}.$$

(i) Prouver que I est un idéal de $\mathcal{O}_K$.

(ii) Quelle est la norme de I ?

(iii) Quelle est la forme quadratique binaire réduite associée à I ?

(iv) L'idéal I est-il principal ?

d. Trouver le plus petit entier $k_0 \geq 1$ tel que I^{k_0} soit principal. Trouver alors $\alpha \in \mathcal{O}_K$ tel que $I^{k_0} = \alpha \cdot \mathcal{O}_K$.

e. Montrer que $I\overline{I} = 2 \cdot \mathcal{O}_K$, où $\overline{I} = 2 \cdot \mathbb{Z} \oplus \left(\frac{1-\sqrt{-31}}{2}\right) \cdot \mathbb{Z}$.

f. Existe-t-il un idéal J de $\mathcal{O}_K$ non principal tel que J^5 soit principal ?

g. Existe-t-il un idéal de $\mathcal{O}_K$ de norme 3 ?