Examen partiel d'Arithmétique

Mercredi 22 février 2023. 3 heures.

Documents, calculatrices, montres connectées et téléphones interdits.

Exercice 1 Existe-t-il des nombres premiers $p > 10$ tels que l'entier $p^6 + 6$ est également un nombre premier ?

Exercice 2 Soient a, b, $c \in \mathbb{N}^*$. On note (a, b) le plus grand commun diviseur de a et b, et on note $[a, b]$ le plus petit commun multiple de a et b.

1. Montrer que $([a, b], c) = [(a, c), (b, c)]$.
2. En déduire que $(a + b, [a, b]) = (a, b)$.
3. Si $a + b = 288$ et $[a, b] = 1716$, que valent a et b ?

Exercice 3 Trouver des entiers naturels $a_1, \ldots, a_k$ et N tels que, pour tout nombre premier $p > 7$, l'entier 21 est un résidu quadratique modulo p si et seulement si $p \equiv a_i\,[N]$ pour un certain $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Exercice 4 Soit $x > 2$.

1. En utilisant le lemme de sommation par parties, montrer que

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\log n}{n} = \frac{1}{2} \log^2 x + A + O\left(\frac{\log x}{x}\right)$$

pour une certaine constante A que l'on écrira explicitement sous la forme d'une intégrale (sans chercher à la calculer).

2. En déduire que

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{d(n)}{n} = \frac{1}{2} \log^2 x + 2\gamma \log x + O(1)$$

où $d(n) = \sum_{\substack{a,b \in \mathbb{N}^* \\ ab = n}} 1$ et γ est la constante d'Euler.

Exercice 5 Soit $n > 2$ un entier et p un nombre premier tel que $p \equiv 1\,[n]$. Le but de cet exercice est d'estimer le nombre $N(X^n + Y^n = 1)$ de solutions $(x, y) \in \mathbb{F}_p^2$ pour l'équation $X^n + Y^n = 1$.

1. Montrer qu'il existe un caractère ψ de $\mathbb{F}_p^\times$ d'ordre n. En déduire que
$$N(X^n = a) = \sum_{i=0}^{n-1} \psi^i(a)$$
pour tout $a \in \mathbb{F}_p$.
2. Ecrire $N(X^n + Y^n = 1)$ en fonction des sommes de Jacobi $J(\psi^i, \psi^j)$ avec $0 \leqslant i, j \leqslant n - 1$.
3. Montrer que
$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=n}}^{n-1} J(\psi^i, \psi^j) = 1 - \frac{n}{2}\left((-1)^{\frac{p-1}{n}} + 1\right).$$
4. Déduire de ce qui précède que
$$\left|N(X^n + Y^n = 1) + \frac{n}{2}\left((-1)^{\frac{p-1}{n}} + 1\right) - (p + 1)\right| < (n - 1)(n - 2)\sqrt{p}.$$
5. Sans utiliser les points précédents, lorsque $p \geqslant 3$, montrer que
$$N(X^2 + Y^2 = 1) = \begin{cases} p - 1 & \text{si } \left(\frac{-1}{p}\right) = 1, \\ p + 1 & \text{si } \left(\frac{-1}{p}\right) = -1. \end{cases}$$
Indication : Lorsque $x \neq 1$, poser $y = a(x - 1)$ avec $a \in \mathbb{F}_p$.

Exercice 6 (Bonus)

1. Soit $p > 2$ un nombre premier et $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $p \nmid x$, $p \nmid y$ mais $p \mid x - y$. Montrer que $v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Comment adapter ce résultat au cas où $p = 2$, lorsque $4 \mid x - y$?