**Examen d'Arithmétique**

Jeudi 25 avril 2024. 3 heures.

Documents, calculatrices, montres connectées et téléphones interdits.

**Exercice 1** On considère le corps de nombres $K = \mathbb{Q}(\sqrt{23})$.

1. Déterminer l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ de $K$, en utilisant les résultats du cours.
2. Calculer la décomposition en fraction continue de $\sqrt{23}$ et vérifier qu'elle est ultimement périodique de période 4.
3. Soit $\mathcal{O}_K^\times$ le groupe des inversibles multiplicatifs de $\mathcal{O}_K$. Caractériser les éléments de $\mathcal{O}_K^\times$ parmi ceux de $\mathcal{O}_K$ au moyen de la norme $N_{K/\mathbb{Q}}$ et écrire explicitement l'équation diophantienne correspondante.
4. En déduire que le quotient $\mathcal{O}_K^\times/\{\pm 1\}$ est infini monogène et en calculer un générateur.
5. Peut-on trouver une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients entiers et de déterminant $\pm 1$ telle que $\frac{a\sqrt{23}+b}{c\sqrt{23}+d}$ ait un développement en fraction continue ultimement périodique de période 3 ?

**Exercice 2** On considère la fonction sommatoire $M_\mu(x) = \sum_{n \le x} \mu(n)$ de la fonction de Möbius $\mu$.

1. Montrer par un argument très simple que $M_\mu(x) = O(x)$ lorsque $x \to \infty$.
2. Montrer que l'inverse de la fonction zêta peut s'écrire sous la forme suivante :
$$\frac{1}{\zeta(s)} = s \int_1^\infty \frac{M_\mu(x)}{x^{s+1}} dx,$$
lorsque $\mathrm{Re}(s) > 1$.
3. Soit $c \in [\frac{1}{2}, 1]$ tel que $M_\mu(x) = O(x^c)$ lorsque $x \to \infty$. Montrer que la formule ci-dessus pour l'inverse de la fonction zêta est valide pour $\mathrm{Re}(s) > c$.
4. En déduire que, si on suppose que $M_\mu(x) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors l'hypothèse de Riemann est vérifiée.

**Exercice 3** On considère le corps de nombres $\mathbb{Q}(\sqrt{-14})$.

1. Donner un élément $\alpha \in K$ tel que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$, en utilisant les résultats du cours.
2. Déterminer toutes les formes quadratiques binaires définies positives, réduites et primitives de discriminant $-56$.

3. Montrer que le cardinal du groupe des classes de $\mathcal{O}_K$ est égal à 4.
4. Montrer que la forme quadratique binaire $[1, 0, 14]$ obtenue précédemment correspond à la classe des idéaux principaux de $\mathcal{O}_K$.
5. Montrer que $2, 3$ et $11$ sont des éléments irréductibles de $\mathcal{O}_K$.

Dans la suite de cet exercice on va s'intéresser aux idéaux $(p)$ pour $p \in \{2, 3, 11\}$.

6. Montrer que l'idéal $(11)$ est premier dans $\mathcal{O}_K$.
7. Décomposer l'idéal $(2)$ en produit d'idéaux premiers de $\mathcal{O}_K$.
8. Soit $I$ le sous-groupe additif de $\mathcal{O}_K$ engendré par 3 et $1 + i\sqrt{14}$. Montrer que $I$ est un idéal de $\mathcal{O}_K$, de norme 3.
9. Trouver une base directe de l'idéal $I^2$ en tant que $\mathbb{Z}$-module libre et calculer la forme quadratique binaire associée.
10. En déduire la structure du groupe des classes de $\mathcal{O}_K$.
11. Décomposer l'idéal $(3)$ en produit d'idéaux premiers de $\mathcal{O}_K$.