Examen partiel d'Arithmétique
Mercredi 28 février 2024. 3 heures.
Documents, calculatrices, montres connectées et téléphones interdits.

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{Z}^3$ l'équation $6x + 10y + 15z = 7$.

Exercice 2 Soit p un nombre premier. Montrer que

$$1^k + 2^k + \ldots + (p-1)^k \equiv \begin{cases} -1 \bmod p & \text{si } p-1 \mid k, \\ 0 \bmod p & \text{sinon.} \end{cases}$$

Indication : écrire les termes m^k modulo p au moyen d'un générateur de $\mathbb{F}_p^\times$.

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $T = \{(k,d) \in \mathbb{N}^2 : d \mid n, 1 \leq k \leq d, k \wedge d = 1\}$ et $S = \{\frac{kn}{d} \in \mathbb{N}^* : (k,d) \in T\}$.

1. Montrer que $\mathrm{Card}(T) = n$.
2. En déduire que $S = \{1, \ldots, n\}$.

Soit F une fonction arithmétique de la forme $F(n) = \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})$ pour une fonction $f : \mathbb{Q} \cap [0,1] \to \mathbb{C}$. On considère la fonction de Möbius μ.

3. Montrer en utilisant l'ensemble S que $G = \mu * F$ satisfait

$$G(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \wedge n = 1}}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit une généralisation

$$\varphi_k(n) = \sum_{\substack{m=1 \\ m \wedge n = 1}}^{n} m^k$$

de la fonction indicatrice d'Euler φ.

4. Montrer que

$$\sum_{d \mid n} \frac{\varphi_k(d)}{d^k} = \frac{1^k + \ldots + n^k}{n^k}.$$

5. En déduire que $\varphi_1(n) = \frac{1}{2} n \varphi(n)$ lorsque $n \geq 2$ et que le produit des générateurs du groupe multiplicatif $\mathbb{F}_p^\times$ avec p premier impair est $(-1)^{\varphi(p-1)}$.

Exercice 4 Soit $b > 2$ entier impair et non divisible par un carré parfait > 1. On considère les ensembles $S_{\pm}(b) = \{m \in \mathbb{N}^* : 1 \leq m \leq b, \left(\frac{m}{b}\right) = \pm 1\}$ où $\left(\frac{m}{b}\right)$ désigne le symbole de Jacobi.

1. Montrer que $S_-(b) \neq \emptyset$.
2. En déduire que $\sum_{k=1}^{b} \left(\frac{k}{b}\right) = 0$ et que $\mathrm{Card} S_{\pm}(b) = \frac{1}{2}\varphi(b)$.

Soit p premier tel que $p \nmid b$ et $p \equiv 1 \bmod 4$.

3. Montrer que b est un résidu quadratique modulo p si et seulement si il existe $c \in S_+(b)$ tel que $b \mid p - c$.
4. Caractériser les nombres premiers impairs modulo lesquels 21 est un résidu quadratique, et lister ceux qui sont inférieurs à 50.

Exercice 5 Soit p premier impair. Pour $\chi_1, \dots, \chi_k \in \widehat{\mathbb{F}_p^\times}$, on définit

$$J(\chi_1, \dots, \chi_k) = \sum_{\substack{(c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{F}_p^k \\ c_1 + \dots + c_k = 1}} \chi_1(c_1) \dots \chi_k(c_k).$$

1. Montrer que, si il existe $\alpha, \beta \in \{1, \dots, k\}$ tels que χ_α est trivial et χ_β est non trivial, alors $J(\chi_1, \dots, \chi_k) = 0$.
2. Montrer que, si $\chi_1, \dots, \chi_k$ ainsi que le produit $\chi_1 \dots \chi_k$ sont non triviaux, alors
$$g_1(\chi_1) \dots g_1(\chi_k) = J(\chi_1, \dots, \chi_k) g_1(\chi_1 \dots \chi_k),$$
où $g_1(\chi)$ désigne la somme de Gauss du caractère χ.
3. Si k est impair et $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{F}_p^\times$, montrer que le nombre de solutions de l'équation $a_1 x_1^2 + \dots + a_k x_k^2 = 1$ dans $\mathbb{F}_p^k$ est égal à
$$p^{k-1} + \left(\frac{a_1}{p}\right) \dots \left(\frac{a_k}{p}\right) (-1)^{\frac{k-1}{2}\frac{p-1}{2}} p^{\frac{k-1}{2}}.$$