

**Examen d'Arithmétique**

Mercredi 15 avril 2026. 3 heures.

Documents, calculatrices, montres connectées et téléphones interdits.

On rappelle la borne de Minkowski : si  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  avec  $d \in \mathbb{N}^*$  non carré, alors toute classe d'idéaux de  $K$  contient un idéal  $I$  de  $\mathcal{O}_K$  dont la norme vérifie  $N(I) \leq \frac{1}{2} \sqrt{|\Delta_{\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}}|}$ .

**Exercice 1** On considère le corps de nombres  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{15})$ .

1. Montrer que l'anneau des entiers  $\mathcal{O}_K$  de  $K$  est  $\mathbb{Z}[\sqrt{15}]$ .
2. Montrer que  $x + y\sqrt{15} \in \mathcal{O}_K^\times$  avec  $x, y \in \mathbb{Z}$  si et seulement si  $x^2 - 15y^2 = \pm 1$ .
3. Calculer le développement en fraction continue de  $\sqrt{15}$ .
4. Dédire des deux points précédents que  $\mathcal{O}_K^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  et en identifier des générateurs.
5. Donner toutes les fractions irréductibles  $\frac{a}{b}$  avec  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \{1, 2, \dots, 99, 100\}$  qui sont des meilleures approximations de  $\sqrt{15}$ .
6. On note  $P_2 = 2\mathcal{O}_K + (1 + \sqrt{15})\mathcal{O}_K$  et  $P_3 = 3\mathcal{O}_K + \sqrt{15}\mathcal{O}_K$ .  
Montrer que  $P_2^2 = 2\mathcal{O}_K$  et que  $P_3^2 = 3\mathcal{O}_K$ .
7. En déduire la norme de  $P_2$  et de  $P_3$ . Les idéaux  $P_2$  et  $P_3$  sont-ils premiers ?
8. Donner une base de  $P_2$  et de  $P_3$  en tant que  $\mathbb{Z}$ -modules libres.
9. Pour tout idéal non nul  $I$  de  $\mathcal{O}_K$ , montrer que  $N(I) \in I \cap \mathbb{Z}$ .
10. Montrer que le groupe des classes  $\text{Cl}(\mathcal{O}_K)$  est engendré par les classes des idéaux  $P_2$  et  $P_3$  (on pourra utiliser la borne de Minkowski).
11. Calculer la norme de  $3 + \sqrt{15}$ . En considérant la factorisation de l'idéal  $(3 + \sqrt{15})\mathcal{O}_K$  en produit d'idéaux premiers dans  $\mathcal{O}_K$ , montrer que  $\text{Cl}(\mathcal{O}_K)$  est engendré par la classe de  $P_2$ .
12. Montrer que le groupe  $\text{Cl}(\mathcal{O}_K)$  est d'ordre 2.

**Exercice 2** On considère la fonction “nombre de diviseurs premiers”  $\omega$  définie par  $\omega(n) = \text{Card}\{p \in \mathcal{P} : p \mid n\}$ .

1. Montrer que l’abscisse de convergence de la série de Dirichlet  $D_\omega$  associée à  $\omega$  est égale à 1.
2. Montrer que pour tout  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Re}(s) > 1$ , on a

$$D_\omega(s) = \zeta(s) \sum_p \frac{1}{p^s}.$$

3. A l’aide de l’identité  $2^\omega = \mathbb{1} * \mu^2$  établie dans le partiel et dans laquelle  $\mu$  désigne la fonction de Möbius, montrer que l’abscisse de convergence de la série de Dirichlet  $D_{2^\omega}$  associée à  $2^\omega$  est égale à 1.
4. En utilisant le fait que la fonction  $2^\omega$  est multiplicative comme établi dans le partiel, calculer le développement en produit eulérien de  $D_{2^\omega}$ , afin de montrer que pour tout  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Re}(s) > 1$ , on a

$$D_{2^\omega}(s) = \prod_p \frac{p^s + 1}{p^s - 1}.$$

5. En déduire que, pour tout  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Re}(s) > 1$ , on a

$$D_{2^\omega}(s) = \frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)}.$$

6. Déduire de ce qui précède et avec l’aide du théorème d’Ikehara que la fonction sommatoire  $M_{\mu^2}$  de  $\mu^2$  satisfait

$$M_{\mu^2}(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\zeta(2)} x.$$

**Exercice 3** On note  $K$  le corps de nombres  $\mathbb{Q}(\sqrt{-71})$ .

1. Déterminer l’anneau  $\mathcal{O}_K$  des entiers de  $K$  ainsi que le discriminant de  $K$ .
2. Déterminer l’ensemble des formes quadratiques binaires définies positives primitives et réduites de discriminant  $D = -71$ .
3. En déduire que le groupe des classes de  $\mathcal{O}_K$  est un groupe cyclique dont on calculera le cardinal.
4. Quelle forme quadratique binaire définie positive primitive et réduite de discriminant  $D = -71$  est associée à la classe des idéaux principaux de  $\mathcal{O}_K$  ?