Examen partiel d'Arithmétique

Mercredi 18 février 2026. 3 heures.

Documents, calculatrices, montres connectées et téléphones interdits.

Exercice 1 Soit $a \in \mathbb{Z}$. On considère le système de congruences

$$\begin{cases} x & \equiv & a & \mod 15, \\ x & \equiv & 10 & \mod 63. \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de a ce système admet-il au moins une solution $x \in \mathbb{Z}$?
2. Pour de telles valeurs de a, combien de solutions $x \in \mathbb{Z} \cap [1, 945]$ possède ce système ?
3. Déterminer l'ensemble des solutions de ce système en fonction de a.

Exercice 2 On considère le polynôme $P(X) = X^6 + X^3 + 1$. Pour p premier, on notera $\overline{P}$ la réduction de P modulo p.

1. Ecrire P comme produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Utiliser le critère d'Eisenstein pour montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
3. Vérifier que $\overline{P}$ est réductible dans $\mathbb{F}_p[X]$ et déterminer le nombre de ses facteurs irréductibles lorsque $p = 3$ ou $p \equiv 1 \mod 9$.
4. Vérifier que $\overline{P}$ s'écrit comme produit de 2 facteurs irréductibles de degré 3 lorsque $p \equiv 4$ ou $7 \mod 9$.

Exercice 3 On considère la fonction de Möbius μ, et la fonction "nombre de diviseurs premiers" définie par $\omega(n) = \mathrm{Card}\{p \in \mathcal{P} : p \mid n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Celles-ci permettent de définir la fonction μ^2 par $\mu^2(n) = (\mu(n))^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et la fonction 2^ω par $2^\omega(n) = 2^{\omega(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Les fonctions μ^2 et 2^ω sont-elles multiplicatives ? complètement multiplicatives ?
2. Déterminer l'inverse de la fonction μ^2 pour la convolution arithmétique.
3. Démontrer que $2^\omega = \mathbb{1} * \mu^2$.
4. En déduire l'inverse de la fonction 2^ω pour la convolution arithmétique, et l'exprimer au moyen des fonctions arithmétiques évoquées ci-dessus, sans faire apparaître de convolution arithmétique.

Exercice 4 On considère la fonction arithmétique $\sigma = \mathbb{1} * \mathrm{Id}$, où $\mathbb{1}$ est la fonction constante égale à 1 et Id est la fonction identité.

1. Démontrer l'identité
$$\sum_{k=1}^{n} \sigma(k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 1 \right).$$
2. En déduire que
$$\sum_{n \leqslant x} \sigma(n) =_{+\infty} \frac{\zeta(2)}{2} x^2 + O(x \log x),$$
où ζ désigne la fonction zêta de Riemann.

Exercice 5 Soit p premier tel que $p \equiv 1 \bmod 4$.

1. Montrer qu'il existe deux éléments χ et $\overline{\chi}$ d'ordre exactement 4 dans $\widehat{\mathbb{F}_p^\times}$.
2. Montrer que $g(\chi)^4 = \chi(-1) p J(\chi, \chi) J(\chi, \chi^2)$ et que $J(\chi, \chi) = \chi(-1) J(\chi, \chi^2)$.
3. Montrer que $g(\chi) = \sqrt{p} e^{i\theta}$ pour un réel θ tel que $p \cos(4\theta)$ est un entier congru à 1 modulo 4.
4. Lorsque $p = 13$, vérifier que le réel θ ci-dessus satisfait $\cos(4\theta) = \frac{5}{13}$.

Exercice 6 Soit $N \geqslant 2$ un entier et soit χ un caractère de Dirichlet modulo N tel que $\chi(\mathbb{Z}) \not\subset \{0, 1\}$.

1. Démontrer que pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a \leqslant b$, on a
$$\left| \sum_{n=a}^{b} \chi(n) \right| \leqslant \frac{\varphi(N)}{2}.$$
2. Déterminer tous les nombres premiers $p \geqslant 3$ et tous les entiers $b \geqslant 1$ pour lesquels
$$\left| \sum_{n=1}^{b} \left(\frac{n}{p} \right) \right| = \frac{\varphi(p)}{2}.$$