Université Paris-Saclay 2022-2023
M1 M.F., Orsay Arithmétique

T.D. 4 : Théorème des nombres premiers

Les exercices soulignés sont ceux qui seront corrigés en TD ; ils sont à chercher en priorité.

Exercice 1 Soient $p > 3$ un nombre premier, et χ un caractère de Dirichlet réel modulo p. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{p-1} k\chi(k)$$

est un entier divisible par p. Qu'en est-il pour $p = 3$?

Exercice 2 (*Série de Dirichlet de la fonction de Liouville*) On rappelle la définition de la fonction de Liouville : $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ où $\Omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers de n comptés avec multiplicités (c'est-à-dire $\Omega(n) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$ si $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ est la décomposition de n en produit de facteurs premiers).

Donner l'abscisse de convergence absolue de la série de Dirichlet F_λ associée à λ. Donner le développement en produit eulérien de F_λ puis exprimer F_λ uniquement en fonction de la fonction zêta de Riemann.

Exercice 3 (*Quelques produits eulériens*)

1. Soit $\mathcal{P}$ un sous-ensemble (éventuellement infini) de l'ensemble des nombres premiers ; notons $f_{\mathcal{P}}$ la fonction indicatrice de l'ensemble des entiers premiers à tout élément de $\mathcal{P}$. Développer la série de Dirichlet $F_{\mathcal{P}}$ associée à $f_{\mathcal{P}}$ en produit eulérien. Exprimer ce produit à l'aide d'un produit indexé par $\mathcal{P}$ et de la fonction ζ de Riemann. Si $\mathcal{P}$ est fini, quelle est l'abscisse de convergence absolue de $F_{\mathcal{P}}$?
2. Soit $k \geq 2$ un entier et f_k la fonction indicatrice de l'ensemble des entiers non divisibles par une puissance k-ème de nombre premier. Exprimer la série de Dirichlet associée à f_k en n'utilisant que la fonction ζ de Riemann. Quelle est l'abscisse de convergence absolue de cette série ? Que vaut la série de Dirichlet associée à la fonction g_k définie par $f_k = \mathbf{1} * g_k$?
3. Donner le développement en produit eulérien et l'abscisse de convergence absolue de la série de Dirichlet associée à l'indicatrice d'Euler φ.

Exercice 4 (*Une racine carrée pour la convolution*) Soit f une fonction complètement multiplicative vérifiant $|f(p)| \leq M$ pour tout p premier, où M est une constante indépendante de p. En considérant les séries de Dirichlet associées, construire une fonction multiplicative g telle que $g * g = f$.

Exercice 5 (*Premières conséquences du TNP*) Déduire chacun des points suivants du théorème des nombres premiers.

1. Le n-ème nombre premier p_n vérifie $p_n \sim n \log n$ lorsque $n \to \infty$.
2. Si ω désigne la fonction « nombre de facteurs premiers distincts », alors $\limsup_{n\to\infty} \frac{\omega(n)}{(\log n)(\log\log n)^{-1}} = 1$.
3. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x_0(\varepsilon) \geq 2$ tel que pour tout $x \geq x_0(\varepsilon)$, il existe p premier satisfaisant $x < p \leq (1+\varepsilon)x$.
4. L'ensemble des rationnels de la forme p/q avec p et q premiers est dense dans $\mathbf{R}_{\geq 0}$.
5. Étant donné n'importe quelle chaîne de caractères $a_1 \cdots a_n$ où $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $a_1 \neq 0$, il existe un nombre premier dont l'écriture décimale commence par cette chaîne.

Exercice 6 (*TNP et fonction de Möbius, I*) Le but de cet exercice est de montrer que le théorème des nombres premiers implique $\sum_{1\leq n\leq x} \mu(n) = o(x)$ lorsque $x \to \infty$.

1. Soit f une fonction arithmétique bornée. On considère, sous réserve d'existence :
$$M(f) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{1\leq n\leq x} f(n) \qquad \text{et} \qquad H(f) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\log x} \sum_{1\leq n\leq x} f(n)\log n\,.$$
Montrer que $M(f)$ existe si et seulement si $H(f)$ existe, et qu'alors $M(f) = H(f)$.
2. Montrer que si $n \geq 1$ alors on a $\mu(n)\log n = -(\mu * \Lambda)(n)$.
3. Conclure ; on rappelle que le théorème des nombres premiers est équivalent à $\psi(x) \sim x$ lorsque $x \to \infty$, où ψ est la fonction sommatoire de la fonction de von Mangoldt.

Exercice 7 (*TNP et fonction de Möbius, II*) Le but de cet exercice est de démontrer l'implication réciproque à celle de l'exercice 6.

On rappelle le cas particulier suivant de la formule d'Euler–Maclaurin : soit $x \geq 1$ et f une fonction continûment dérivable sur $[1, x]$. Alors :
$$\sum_{1\leq n\leq x} f(n) = \int_1^x f(t)dt + \int_1^x \{t\} f'(t)dt - \{x\}f(x) + f(1)\,.$$

1. Montrer qu'il existe une constante c telle que pour tout $N \geq 1$ on ait :
$$\sum_{n\leq N} \log n = N(\log N - 1) + \frac{1}{2}\log N + c + O\left(\frac{1}{N}\right)\,.$$
2. On rappelle la formule suivante pour la fonction sommatoire de d, fonction « nombre de diviseurs » : pour tout $x \geq 1$,
$$\sum_{1\leq n\leq x} d(n) = x\log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x})\,.$$

Soit f (resp. r) la fonction arithmétique définie par $f(n) = d(n) - 2\gamma$ (resp. $r(n) = \log n - f(n)$). Montrer que pour tout $x \geq 1$,

$$\sum_{1 \leq n \leq x} r(n) = O(\sqrt{x})\,.$$

3. Montrer que pour tout $x \geq 1$, on a $\psi(x) = x + E(x) + O(1)$ en posant $E(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} (\mu * r)(n)$.
4. En supposant $\sum_{1 \leq n \leq x} \mu(n) = o(x)$ lorsque $x \to \infty$, montrer que $E(x) = o(x)$ lorsque $x \to \infty$. Conclure.

Exercice 8 (*Non-annulation en* 1 *de* $L(s, \chi)$) Soient $q > 0$ un entier et χ un caractère de Dirichlet modulo q à valeurs réelles. On suppose χ non principal. Le but de cet exercice est de montrer que $L(1, \chi) \neq 0$.

1. Notons $f = \mathbf{1} * \chi$. Montrer que $f(n) \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ et que $f(n) \geq 1$ si n est un carré.
2. En utilisant la formule d'Euler–Maclaurin rappelée au début de l'exercice 7, justifier l'existence d'une constante A telle que pour tout $x \geq 1$ on ait

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{x} + A + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,.$$

3. Montrer que pour tout s tel que $\Re(s) = \sigma > 0$, on a uniformément en $x \geq 1$:

$$\sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n^s} = L(s, \chi) + O_{q,s}(x^{-\sigma})\,.$$

4. Pour $x \geq 2$, notons $S(x) = \sum_{n \leq x} f(n)/\sqrt{n}$. Justifier $S(x) \gg \log x$, pour tout $x \geq 2$.
5. Justifier que $S(x) = \Sigma_1 + \Sigma_2 - \Sigma_3$ en posant

$$\Sigma_1 = \sum_{d \leq \sqrt{x}} \frac{\chi(d)}{\sqrt{d}} \sum_{m \leq x/d} \frac{1}{\sqrt{m}}\,, \qquad \Sigma_2 = \sum_{m \leq \sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{d \leq x/m} \frac{\chi(d)}{\sqrt{d}}\,,$$
$$\Sigma_3 = \sum_{d \leq \sqrt{x}} \frac{\chi(d)}{\sqrt{d}} \sum_{m \leq \sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{m}}\,.$$

   (a) Montrer que $\Sigma_1 = 2\sqrt{x}L(1, \chi) + O(1)$.
   (b) Montrer que $\Sigma_2 = L(1/2, \chi)2x^{1/4} + O(1)$.
   (c) Montrer que $\Sigma_3 = L(1/2, \chi)2x^{1/4} + O(1)$.
6. En déduire que $L(1, \chi) \neq 0$.

Exercice 9 Soit β la fonction arithmétique définie par $\beta(p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}) = \alpha_1 \cdots \alpha_r$ et $\beta(1) = 1$. On note F_β la série de Dirichlet associée à β.

1. Donner le développement en produit eulérien de F_β, et majorer son abscisse de convergence absolue.
2. En déduire un équivalent asymptotique de $\sum_{n \le x} \beta(n)$.

Exercice 10 (*Pólya–Vinogradov*) Le but de cet exercice est de généraliser les exercices 2 et 4 du T.D. 3. Soient $m \geq 2$ un entier et χ un caractère de Dirichlet modulo m. On suppose χ primitif, ce qui signifie qu'il n'existe aucun couple (d, χ') tel que d divise m, $d \neq m$, χ' est un caractère de Dirichlet modulo d, et $\chi(n) = \chi'(n)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ premier à m.

On définit le k-ème coefficient de Fourier de χ de la manière suivante :

$$\hat{\chi}(k) = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \chi(j) \exp\left(-\frac{2i\pi kj}{m}\right).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}$ on a $\chi(n) = \sum_{k=0}^{m-1} \hat{\chi}(k) \exp\left(\frac{2i\pi kn}{m}\right)$.
2. Montrer que pour tout entier k on a $\hat{\chi}(k) = \overline{\chi(k)}\hat{\chi}(1)$.
3. Montrer que $|\hat{\chi}(1)| = 1/\sqrt{m}$.
4. Soit $N \geq 1$ un entier ; notons f la fonction définie sur les entiers par $f(k) = \sum_{n=1}^{N} \exp(2i\pi kn/m)$. En utilisant la formule $f(m-k) = \overline{f(k)}$, démontrer l'inégalité de Pólya–Vinogradov :

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \chi(n) \right| \leq \sqrt{m} \log\left(\frac{em}{2}\right).$$