

Université Paris-Saclay 2022-2023
M1 M.F., Orsay Arithmétique

T.D. 7 : Formes quadratiques binaires

Les exercices soulignés sont ceux qui seront corrigés en TD ; ils sont à chercher en priorité.

Exercice 1 Soit $f(x, y)$ une forme quadratique entière et soit m un entier. On dit que f *représente primitivement* m s'il existe des entiers r, t premiers entre eux tels que $f(r, t) = m$.

1. Montrer que $f(x, y)$ représente primitivement m si et seulement si $f(x, y)$ est proprement équivalente à $mx^2 + bxy + cy^2$ pour certains entiers b, c.
2. Soient $D \equiv 0, 1 \pmod 4$ un entier et m un entier impair premier à D. Montrer qu'il existe une forme primitive de discriminant D qui représente primitivement m si et seulement si D est un carré modulo m.
3. En déduire que si $n > 0$ est entier et si p est un nombre premier impair qui ne divise pas n, alors $\left(\frac{-n}{p}\right) = 1$ si et seulement si p est primitivement représenté par une forme primitive de discriminant $-4n$.
4. Montrer qu'un nombre premier impair p est somme de deux carrés si et seulement si $p \equiv 1 \pmod 4$.

Exercice 2 Soit $D < 0$ un entier tel que $D \equiv 0, 1 \pmod 4$. On note χ_D le symbole de Kronecker relatif à D, et on appelle *forme principale* de discriminant D la forme suivante :

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 - \frac{D}{4}y^2 & \text{si } D \equiv 0 \pmod 4 \\ x^2 + xy + \frac{1-D}{4}y^2 & \text{si } D \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$$

Montrer que les éléments de $(\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^\times$ représentés par la forme principale de discriminant D forment un sous-groupe H de $\ker \chi_D$. (On pourra utiliser l'exercice 1.)

Exercice 3 Calculer $h(-4)$ en utilisant la formule du nombre de classes de Dirichlet.

<u>Exercice 4</u> En utilisant la formule du nombre de classes de Dirichlet, calculer $h(-3)$. En déduire, en utilisant l'exercice 1, quels sont les nombres premiers de la forme $x^2 + xy + y^2$.

<u>Exercice 5</u> En comptant les solutions d'une équation diophantienne, déterminer le nombre de classes de formes quadratiques binaires positives et primitives de discriminant -280. En déduire le cardinal du groupe des classes de l'anneau des entiers du corps quadratique $\mathbf{Q}(\sqrt{-70})$.

Exercice 6 (*extrait de l'examen de 2019*) On note K le corps de nombres $\mathbf{Q}(\sqrt{-37})$.

1. Déterminer l'anneau $\mathcal{O}_K$ des entiers de K ainsi que le discriminant de K.
2. Montrer qu'un élément $z \in \mathcal{O}_K$ est inversible dans $\mathcal{O}_K$ si et seulement si $N_{K/\mathbf{Q}}(z) = 1$. En déduire l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{O}_K$.
3. Déterminer l'ensemble des formes quadratiques binaires définies positives primitives et réduites de discriminant $D = -148 = -4 \times 37$.
4. En déduire le cardinal du groupe des classes de $\mathcal{O}_K$.
5. En déduire que si I est un idéal non nul de $\mathcal{O}_K$, alors I^2 est un idéal principal. Si I est un idéal non nul de $\mathcal{O}_K$ tel que I^3 est principal, que dire de I ?

Soit $I = \mathcal{O}_K 19 + \mathcal{O}_K(1 + \mathrm{i}\sqrt{37})$ l'idéal de $\mathcal{O}_K$ engendré par 19 et $1 + \mathrm{i}\sqrt{37}$.

6. Déterminer une $\mathbf{Z}$-base de I et calculer la norme de I.
7. Déterminer une forme quadratique binaire associée à une base directe de I. L'idéal I est-il principal ?

Exercice 7 (*extrait de l'examen de 2020*) On note K le corps de nombres $\mathbf{Q}(\sqrt{-87})$.

1. Déterminer l'anneau $\mathcal{O}_K$ des entiers de K ainsi que le discriminant de K.
2. Déterminer l'ensemble des formes quadratiques binaires définies positives primitives et réduites de discriminant $D = -87$.
3. En déduire le cardinal du groupe des classes de $\mathcal{O}_K$.
4. Montrer qu'il existe un idéal I de $\mathcal{O}_K$ qui n'est pas principal et tel que I^3 est principal.
5. Donner un exemple explicite d'idéal I de $\mathcal{O}_K$ qui n'est pas principal mais tel que I^2 est principal (on pourra par exemple essayer de décomposer (3) en produit d'idéaux premiers).
6. Soit $I \subset \mathcal{O}_K$ un idéal non nul. Montrer que $N(I) \in I \cap \mathbf{Z}$.
7. Montrer qu'il n'existe pas d'idéal I de norme 5 dans $\mathcal{O}_K$.