Salut Michael,

Voici mes notes pour ma partie de l'exposé. J'aimerais :

1. Qu'on donne un nom à $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \setminus \{(0,\infty), (\infty,0)\}$ (page 3) : par exemple $\mathcal{U}$?

2. Que tu me dises si tu préfères que je note $((1,0),(0,1))$ au lieu de $(\infty, 0)$

3. Qu'on soit d'accord sur l'énoncé du Th (page 3) (avec $N+1$ au dénominateur).

En tout cas à jeudi, et profite bien de Paris d'ici-là !

Stéphane

action p. 2?

Un lemme de zéros lié à $SL_2\mathbb{Z}$

harmonie $\mathcal{H}$ $(0,\infty)$) p.3

Exposé commun avec M. Nakamaye, GEbD, 4/2/2010.

N+1 bor p.3

1. Indépendance algébrique de logarithmes.

C'est la motivn.

$L = \{ \lambda \in \mathbb{C},\ e^\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}^* \}$ ensemble des log de nb alg
(pour chq nb alg, on prend ttes les détermins de son log)

L est un $\mathbb{Q}$-ev ; les relns $\mathbb{Q}$-linéaires sont triviales ($\leftarrow \ln \Pi = \Sigma \ln$).

Conj 1 : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in L$ $\mathbb{Q}$-l.i. Alors $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont alg^{qt} indep.

"Conj d'indep alg des log"

Csq de Conj Schanuel.

Baker (1966) : $\mathbb{Q}$-li $\Rightarrow 1, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ $\overline{\mathbb{Q}}$-l.i.

Conj : $\log(2)$ et $\log(3)$ sont a.i.

Conj : $\mathrm{degtr}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(L) \geq 2$.

Traducn géom^q :

Conj 2 : Soient $n \geq 1$ et $X \subsetneq \mathbb{C}^n$ un fermé algébrique défini sur $\mathbb{Q}$.
Soit $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in X \cap L^n$. Alors x appartient à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ défini sur $\mathbb{Q}$.

NB : X défini par l'annuln d'1 famille de polynômes à coeffs dans $\mathbb{Q}$.

NB : Roy a proposé une 3^è conj ég^{te} : $X \cap L^n = \bigcup_{\substack{E \subset X \\ E\ \mathrm{sev\ déf}/\mathbb{Q}}} E \cap L^n$.

Conj 2 est un pb ouvert pour la plupart des variétés X.

Grassmannienne : Soient $k \geq 2$ et $m \geq k+2$. On identifie $\Lambda^k \mathbb{C}^m$ à $\mathbb{C}^n$
avec $n = \binom{m}{k}$ et on note $X_{k,m} = \{ v_1 \wedge \dots \wedge v_k \mid v_1, \dots, v_k \in \mathbb{C}^m \} \subsetneq \mathbb{C}^n$.
$X_{k,m}$ est le cône affine au-dessus de la grassmannienne qui paramètre les sous-espaces vectoriels de dimension k dans $\mathbb{C}^m$.

C'est un fermé alg^q de $\mathbb{C}^n$ déf/$\mathbb{Q}$.

$SL_2 \mathbb{Z}_2$

<u>Th</u> (Roy 1995) : Si $(k,m) \neq (2,4)$ alors la Conj 2 est vraie pour $X_{k,m}$.

((un pt de $X_{k,m} \cap L^n$: c'est $v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \underbrace{\lambda_{i_1, \dots, i_k}}_{\in L} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ $(e_1, \dots, e_m)$ base canon de $\mathbb{C}^m$))

Dem : utilise le Th du sous-groupe linéaire

(Michel Waldschmidt, 1981) (génén du Th des 6 exp),

et des manipuln algq sur la Grassmannienne.

~~Le cas $(k,m) = (2,4)$ est $\Leftrightarrow$ diffq conj 4 exponentielles~~

Conj 2 est connue pour d'autres variétés X, mais la preuve n'utilise jamais une construcn de trce directt sur X : on utilise par exemple le Th du sg lin.

Objectif : Démontrer la Conj 2 pour $X_{k,m}$ via une preuve de transcendance directt sur $X_{k,m}$.

Roy, 1995 : construction d'une fct auxiliaire.

Pour $N \geq 1$, posons $G[N] = \{ A \in GL_m(\mathbb{Z})$ dont les coefficients sont des entiers compris entre 0 et $N \}$

Pour $x = v_1 \wedge \dots \wedge v_k \in X_{k,m}$, posons $G[N] \cdot x = \{ (\Lambda^k A)(x) = A v_1 \wedge \dots \wedge A v_k , \ A \in G[N] \}$

(en effet $A \cdot x = (\Lambda^k A)(x)$ définit une action de $G = GL_m(\mathbb{Z})$ sur $\Lambda^k \mathbb{C}^m = \mathbb{C}^n$).

<u>Prop</u> (Roy, 1995) : Soit $x \in X_{k,m} \cap L^n$ dont les coordonnées sont $\mathbb{Q}$-lint indep.

Pour tout N assez grand il existe $P_N \in \mathbb{Z}[Y_1, \dots, Y_m]$ <u>non nul</u> tel que

$\begin{cases} \deg P_N \leq N^\delta \text{ pour un certain } \delta > 0 \text{ (qui dépend seulement de } k \text{ et } m) \\ P_N(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_m}) = 0 \quad \text{pour tout } x' = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in G[N] \cdot x . \end{cases}$

((Pt <u>crucial</u> : tous les pts de $G[N] \cdot x$ sont dans $X_{k,m} \cap L^n$.))

De plus, si $m \geq k(k+2)$ alors l'existence de P_N est non triviale pour N assez gd (i.e. le nb de coeff de P_N est > au nb de pts dans $G[N] \cdot x$).

Pour conclure il manque slt un lemme de zéros.

2. Le cas de $SL_2\mathbb{Z}$.

Pour $N \geq 1$, $\Gamma[N] = \left\{ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2\mathbb{Z},\quad 0 \leq a, b, c, d \leq N \right\}$

$X_{k,m}$ remplacé par $\mathbb{C}^2$: pour $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ on pose

$$\Gamma[N]\cdot(u,v) = \left\{ (au+bv,\ cu+dv),\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma[N] \right\}$$

(action naturelle de $SL_2\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}^2$).

On s'intéresse aux points $\left(e^{au+bv}, e^{cu+dv}\right) = \left((e^u)^a (e^v)^b, (e^u)^c (e^v)^d\right)$.

$\rightsquigarrow$ on regarde directt l'action de $SL_2\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{G}_m^2$ définie par

$$M\cdot(x_1, x_2) = \left(x_1^a x_2^b,\ x_1^c x_2^d\right)$$

Quand M est à coeff ≥ 0 cela a un sens $\forall (x_1,x_2) \in \mathcal{U} := (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \setminus \{(\infty, 0), (0, \infty)\}$.

Posons $T[N] = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma[N] \;\middle|\; \begin{array}{l} a, b, c, d > 0 \text{ et } b, d \text{ maximaux parmi les} \\ \text{couples } (b', d') \text{ tq } ad' - b'c = 1 \text{ et } 1 \leq b', d' \leq N \end{array} \right\}$

Clair^t $T[N] \simeq \{(a,c) \mid 1 \leq a, c \leq N,\ \mathrm{pgcd}(a,c) = 1\}$. On a :

$$\left(\frac{6}{\pi^2} + o(1)\right)N^2 = \mathrm{Card}\, T[N] \leq \mathrm{Card}\, \Gamma[N] \leq \left(\frac{18}{\pi^2} + o(1)\right)N^2$$

(quand $N \to +\infty$). Donc $T[N] \subset \Gamma[N]$ mais ont le m̂ nb d'élé^t (au plus à un facteur 3 près).

Th (FN) : Pour tout $N \geq 1$ il existe un ensemble fini $\Sigma_N \subset (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \setminus \{(\infty,0),(0,\infty)\}$ ayant la propriété suivante. Soit $C \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ une courbe de bidegré (d_1, d_2) (pas nécessairement irréductible) qui contient $T[N]\cdot x$ pour un certain $x \in (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \setminus \{(\infty, 0), (0, \infty)\}$, $x \notin \Sigma_N$.
Alors on a :

$$d_1 + d_2 \geq \frac{\mathrm{Card}\,(T[N]\cdot x)}{N+1}.$$

Si en outre $\mathrm{mult}_y(C) \geq M$ pour tout $y \in T[N]\cdot x$, alors

$$d_1 + d_2 \geq \frac{M\, \mathrm{Card}\,(T[N]\cdot x)}{N+1}.$$

Remarques : $SL_2\mathbb{Z}_4$

① $\Sigma_N = \emptyset$ convient conjecturalement, mais la preuve conduit à un ensemble d'exceptions possibles : c'est dû à la méthode de dégénérescence.

② $T[N]$ nécessaire (au lieu de $\Gamma[N]$) pour la preuve ; ms énoncé ok avec $\Gamma[N]$ si $N+1 \rightsquigarrow (3+o(1))N$ (en tt cas si $\mathrm{Card}(T[N]\cdot x) = \mathrm{Card}\, T[N]$).

③ Différences avec le lemme de zéros qui s'appliquerait à la construcn de Roy :

- acn de $SL_2\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}^2$ au lieu d'acn de $GL_m\mathbb{Z}$ sur $\Lambda^k\mathbb{C}^m$
- $\Sigma_N \neq \emptyset$ a priori mais on peut peut-être changer de point x pour éviter Σ_N (car Σ_N fini).
- $T[N]$ au lieu de $\Gamma[N]$, ~~pb~~ car chgt slt la cst.
- le cas $M=1$, $d_1 = d_2$ suffit.

④ Optimal (à constante x^{ire} près) quand $d_1 = d_2 = d$ (et si $\mathrm{Card}\, T[N].x = \mathrm{Card}\, T[N]$) :

alg lin donne P_N dès que $(d+1)^2 > M \,\mathrm{Card}\, T[N]$

i.e. $d > \left(\frac{\sqrt{6}}{\pi} + o(1)\right) M N$.

Le Th donne $d > \left(\frac{3}{\pi^2} + o(1)\right) MN$ i.e. une minorn presq aussi bonne optimale.

⑤ Méthode de dégénérescence : idée :

pour $x = (1,t)$ ou $(t,1)$ avec $t \in \mathbb{P}^1$, les points de $T[N]\cdot x$ forment essentiellement le réseau $\{(t^i, t^j),\ 1 \le i,j \le N\}$. Les polynômes $\prod_{i=1}^{N}(X - t^i)$ et $\prod_{j=1}^{N}(Y - t^j)$ s'y annulent d'où une minoration de la cst de Seshadri. Or toute telle minorn est valable sur un ouvert, ici $\mathcal{U}_N$. Comme $\mathcal{U}_N$ contient $\{1\} \times \mathbb{P}^1 \cup \mathbb{P}^1 \times \{1\}$ qui est ample, le cpltaire de $\mathcal{U}_N$ est un ensemble fini de points : c'est Σ_N.