Systèmes de Coxeter

Sujet proposé par Yves Laszlo

Mladen Dimitrov et Stéphane Fischler

26 mai 1997

1 Définition des systèmes de Coxeter et exemples.

1.1 Définition des systèmes de Coxeter.

Soit W un groupe et S une partie génératrice de W, formée d'éléments d'ordre 2. On note $m(s, s')$ l'ordre dans le groupe W de l'élément ss', où $s \in S$ et $s' \in S$. Cet ordre peut éventuellement être infini.

Soit Γ le *groupe libre sur S, quotienté par les relations ss=1*, c'est-à-dire l'ensemble des mots écrits en utilisant comme "lettres" les éléments de S (normalement on utilise aussi les inverses de ces éléments, mais ici ce sont des éléments d'ordre 2, égaux à leurs inverses). L'opération est la concaténation des mots et on a les règles de simplification $ss = 1$. Ainsi Γ est un groupe, d'élément neutre le mot vide, noté 1.

Soit $\mathcal{R}$ la relation sur Γ définie ainsi : pour $x, y \in \Gamma$, $x\mathcal{R}y$ si et seulement si il existe un algorithme, c'est-à-dire une suite finie d'étapes, permettant de passer de x à y, chaque étape étant l'insertion dans un mot d'une chaîne de la forme $(ss')^{m(s,s')}$, à un endroit quelconque, ou bien de la suppression d'une telle chaîne. Bien sûr, les chaînes de cette forme ne sont prises en compte que si *m(s,s')* est fini; on autorise s et s' à être égaux et dans ce cas on retrouve la relation $ss = 1$. La relation $\mathcal{R}$ ainsi définie est une relation d'équivalence compatible avec l'opération de concaténation, d'où l'existence du groupe quotient $\Gamma/\mathcal{R}$, appelé *groupe libre sur S quotienté par les relations* $(ss')^{m(s,s')} = 1$.

Remarque 1.1 *$\Gamma/\mathcal{R}$ est aussi le groupe quotient Γ/H où H est le plus petit sous-groupe distingué dans Γ contenant tous les éléments de la forme $(ss')^{m(s,s')}$ pour $s, s' \in S$ tels que $m(s, s')$ soit fini.*

Soit ϕ le morphisme de groupes de Γ dans W qui prolonge l'application identique sur S; c'est l'application qui au mot $s_1...s_k$ associe l'élément $s_1...s_k$ de W. Par définition de la relation $\mathcal{R}$, deux éléments équivalents ont la même image par ϕ. Ainsi ϕ se factorise en un morphisme de groupes $\Phi : \Gamma/\mathcal{R} \to$W, qui est surjectif car ϕ l'est.

A priori, Φ n'est pas injectif. Lorsqu'il l'est, toutes les écritures d'un élément donné $w \in W$ comme produit d'éléments de S peuvent s'obtenir à partir de l'une d'entre elles par l'algorithme qui définit la relation $\mathcal{R}$. Ces systèmes (W,S) très particuliers sont appelés "systèmes de Coxeter".

Définition 1.2 *Soit (W,S) un groupe muni d'une partie génératrice formée d'éléments d'ordre 2. On dit que (W,S) est un* système de Coxeter *si W est canoniquement isomorphe au groupe libre sur S quotienté par les relations $(ss')^{m(s,s')} = 1$, pour s et s' dans S tels que l'ordre de ss' dans W, noté $m(s, s')$, soit fini.*

Par abus de langage, la partie S est souvent sous-entendue, et on dit que W est un groupe de Coxeter lorsque (W,S) est un système de Coxeter.

1.2 Première propriété des systèmes de Coxeter.

Proposition 1.3 *Soit (W,S) un groupe muni d'une partie génératrice formée d'éléments d'ordre 2. Alors (W,S) est un sytème de Coxeter si, et seulement si, on a la propriété universelle suivante : Pour tout groupe G, pour toute application $f\colon S \to G$ vérifiant $(f(s)f(s'))^{m(s,s')} = 1$ pour tous $s, s' \in S$, f se prolonge en un morphisme de groupes $\bar{f} : W \to G$.*

Si $m(s, s')$ est infini, la condition $(f(s)f(s'))^{m(s,s')} = 1$ n'a pas de sens : on l'ignore.

Démonstration : La propriété universelle énoncée à la proposition 1.3 est celle du groupe libre sur S quotienté par les relations $(ss')^{m(s,s')} = 1$, pour $s, s' \in S$ (voir [BOU1] I, §7.6). Ensuite la proposition découle de la définition même des systèmes de Coxeter.

1.3 Exemples de groupes de Coxeter.

1.3.1 Les groupes diédraux.

Proposition 1.4 *Pour $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, le groupe diédral D_n, muni de deux éléments d'ordre 2 qui l'engendrent, est un système de Coxeter.*

Démonstration : Soit $\{s, s'\}$ un système générateur de D_n, avec s et s' d'ordre 2. Les éléments s et s' sont distincts, sauf dans le cas du groupe à deux éléments, qui est trivialement un groupe de Coxeter. Tout élément de D_n s'écrit de manière unique sous la forme $(ss')^k$ ou $(ss')^k s$ avec k compris entre 0 et $n-1$ (l'ordre de ss' est n). Cette écriture sera dite principale. Pour montrer que D_n est un groupe de Coxeter, il suffit (d'après le paragraphe 1.1) de montrer qu'une écriture quelconque d'un élément de D_n se ramène à une écriture principale par une suite finie d'étapes, chaque étape étant l'insertion ou la suppression d'une chaîne $(ss')^n$ ou $(s's)^n$.

Soit maintenant un élément du groupe libre sur $S = \{s, s'\}$, c'est-à-dire un mot quelconque écrit avec les lettres s et s', mais sans que deux lettres identiques ne se suivent. Si le mot commence par la lettre s', on insère au début la chaîne $(ss')^n$ et on utilise les relations $ss = 1$ et $s's' = 1$ pour le simplifier. On repète ce procédé jusqu'à s'être ramené à un mot commençant par la lettre s. La deuxième lettre est alors nécessairement s', puis les s et les s' alternent. Le mot est donc de la forme $(ss')^k$ ou $(ss')^k s$ avec k quelconque a priori; mais on peut supprimer les chaînes $(ss')^n$, et ainsi se ramener à k compris entre 0 et $n-1$. On peut donc réduire, par l'algorithme du 1.1, n'importe quelle écriture d'un élément de D_n à son écriture principale, qui est unique. C'est bien la définition d'un groupe de Coxeter.

Géométriquement, le groupe diédral D_n est le groupe d'isométries du plan engendré par n droites formant deux à deux des angles de $2k\pi/n$, avec $0 \leq k \leq n-1$. Cette vision géométrique sera généralisée dans la deuxième partie.

1.3.2 Le groupe symétrique.

Proposition 1.5 *Pour n entier, $n \geq 2$, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ d'ordre n, muni des $n-1$ transpositions échangeant deux éléments consécutifs de $\{1,..,n\}$, est un système de Coxeter.*

La démonstration de cette proposition est plus difficile, car on ne peut utiliser facilement l'écriture d'une permutation quelconque comme produit de transpositions de ce type. En fait, ce résultat est un corolaire du théorème 2.1 qui sera énoncé dans la deuxième partie.

A titre d'exemple, on peut voir comment fonctionne l'algorithme sur le cas particulier suivant : prenons $n = 4$, notons a, b, c les transpositions entre 1 et 2, 2 et 3, 3 et 4 (respectivement). On a alors la relation : $(abc)^4 = 1$. Montrons qu'on peut passer d'une écriture à l'autre par l'algorithme. Dans un premier temps, on a :

$$(abc)^2 = abcabc = ab(acac)cabc = abac(a(cc)a)bc = abac(aa)bc = abacbc$$

$= aba(ababab)cbc = (abaaba)babcbc = babcbc = babc(cbcbcb)bc = ba(bccb)cb(cbbc) = bacb$

Puis $(abc)^4 = bacbbacb = bacacb = b(acac)b = bb = 1$, ce qu'il fallait démontrer.

2 Groupes d'isométries engendrés par des symétries.

Soit E un espace affine euclidien de dimension finie sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{H}$ un ensemble d'hyperplans de E. On note s_H la symétrie orthogonale par rapport à H, pour $H \in \mathcal{H}$. On note W le groupe engendré par les s_H. On suppose que pour $w \in W$ et $H \in \mathcal{H}$, on a $w(H) \in \mathcal{H}$. On suppose aussi que l'action de W (muni de la topologie discrète) sur E est propre, c'est-à-dire que pour tous compacts K et L de E, l'ensemble des $w \in W$ tels que $w(K) \cap L \neq \emptyset$ est fini.

Sous ces hypothèses, $\mathcal{H}$ est localement fini. Considérons E privé de la réunion des $H \in \mathcal{H}$. Ses composantes connexes sont appelées chambres relatives à la famille d'hyperplans $\mathcal{H}$. Si C est une chambre, C est ouverte et sa frontière est incluse dans une réunion d'hyperplans de $\mathcal{H}$, qui sont appelés murs de C. On a le théorème suivant (admis, voir [BOU2] V, §3.2) :

Théorème 2.1 *Soit C une chambre, et S l'ensemble des s_H pour H mur de C. Alors*

(i) (W,S) est un système de Coxeter.

(ii) pour toute chambre C', il existe un unique $w \in W$ qui envoie C sur C'; autrement dit, W permute les chambres de façon simplement transitive.

Corollaire 2.2 *Pour $n \geq 2$, le groupe symétrique d'ordre n, muni des $n-1$ transpositions échangeant deux éléments consécutifs de $\{1,..,n\}$, est un système de Coxeter.*

Démonstration : Soit $E = \mathbb{R}^n$, muni de sa base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ et de sa structure euclidienne usuelle. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des hyperplans orthogonaux aux vecteurs $e_i - e_j$ pour i et j distincts compris entre 1 et n. Alors la symétrie par rapport à l'orthogonal de $e_i - e_j$ permute e_i et e_j en laissant fixes tous les autres vecteurs de la base canonique. Comme les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$, le groupe de Coxeter W associé à $\mathcal{H}$ est $\mathfrak{S}_n$: il y a une bijection entre les éléments de W et les permutations des n vecteurs de la base canonique qu'ils induisent. Enfin, on voit que les symétries par rapport aux murs d'une chambre bien choisie correspondent aux transpositions annoncées.

Remarque 2.3 *En fait pour l'action du groupe symétrique décrite dans la démonstration précédente, la droite engendrée par $e_1 + \ldots + e_n$ est invariante, donc on a une représentation linéaire du groupe $\mathfrak{S}_n$ sur l'orthogonal de cette droite, qui est un espace de dimension $n-1$. Ce groupe de Coxeter est noté A_{n-1}. Il est essentiel (ce mot sera défini plus bas). Si on prend $n = 3$, on obtient (en considérant l'orthogonal) une représentation linéaire dans $\mathbb{R}^2$, qui coïncide avec la représentation usuelle (rappelée au 1.3.1) du groupe diédral à 6 éléments (qui est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$).*

En dimension 2, si les hyperplans affines (qui sont des droites) de $\mathcal{H}$ passent tous par un même point, on obtient pour W un groupe diédral. Il y a aussi un autre type de dispositions possible des droites de $\mathcal{H}$, celles qui correspond à la figure II ci-dessous. On obtient alors un groupe W infini, qui contient des translations. L'objectif de ce qui suit est de montrer que tout système d'hyperplans $\mathcal{H}$ (vérifiant les hypothèses de cette partie) est une généralisation de l'un de ces deux types de dessins (où la zone hachurée correspond, dans chaque cas, à une chambre).

Soit C une chambre, $(H_i)_{i \in I}$ la famille de ses murs. A priori l'indexation par I dépend du choix de C, en fait on peut avoir une indexation canonique : si H est un mur de C, on montre que son orbite sous l'action de W contient exactement un mur de chaque chambre. On peut

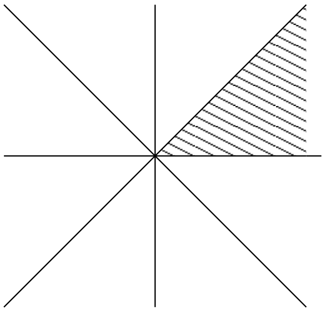


Figure I

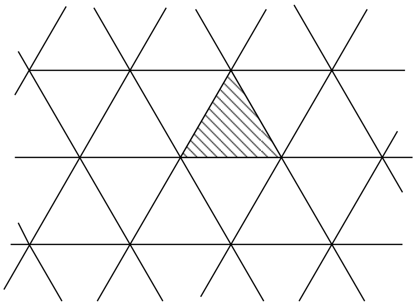


Figure II

donc prendre pour I l'ensemble de ces orbites. Soit donc H_i un mur de C. On note ε_i le vecteur unitaire orthogonal à H et dirigé vers l'intérieur de C. On note m_{ij} l'ordre de $s_{H_i}s_{H_j}$.

Proposition 2.4
(i) Si H_i et H_j sont parallèles alors $m_{ij} = \infty$ et $\varepsilon_i = -\varepsilon_j$.
(ii) Si H_i et H_j ne sont pas parallèles alors m_{ij} est fini et $(\varepsilon_i \mid \varepsilon_j) = -cos(\frac{\pi}{m_{ij}})$.

On obtient donc une famille $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ de vecteurs unitaires à produits scalaires négatifs. Cela impose que I est fini, par compacité de la sphère unité et puisqu'on a $\|\varepsilon_i - \varepsilon_j\|^2 \geq 2$. Cela montre la première partie du théorème suivant, les deux autres assertions étant admises (voir [BOU2] V, 3.6, Théorème 3) :

Théorème 2.5
(i) L'ensemble des murs d'une chambre est fini.
(ii) L'ensemble des directions des hyperplans $H \in \mathcal{H}$ est fini.
(iii) Le groupe formé par les applications linéaires associées aux $w \in W$, noté U(W), est fini.

On cherche maintenant à préciser la nature des groupes W ainsi construits. On commence par se ramener à des cas fondamentaux.

Si $\vec{E}$ ne peut pas s'écrire comme somme directe orthogonale de deux espaces $\vec{E_1}$ et $\vec{E_2}$ non triviaux stables par U(W), W est dit *irréductible*. Dans le cas contraire, l'action de W sur E peut se déduire de son action sur E_1 et sur E_2 (voir [BOU2] V, §3.7 et 3.8).

Si $\vec{E}$ ne contient aucun sous-espace non trivial point par point invariant par U(W), W est dit *essentiel*. Dans le cas contraire, on peut déduire l'action de W sur E de son action sur un sous-espace (affine) de E de direction l'orthogonal d'un tel sous-espace invariant.

Moyennant ces deux définitions, on obtient une description précise de l'action de W et du système de chambres : le théorème 2.6 généralise l'exemple de la figure I, le théorème 2.7 celui de la figure II.

Théorème 2.6 *Supposons W fini et essentiel. Alors pour toute chambre C :*
(i)Il existe un unique point a invariant par W.
(ii) La famille $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ de vecteurs unitaires orthogonaux aux murs de C est une base de l'espace vectoriel $\vec{E}$ sous-jacent à E.
(iii) C est un cône simplicial ouvert de sommet a défini par l'unique base $(\varepsilon'_i)_{i\in I}$ de $\vec{E}$ telle que $(\varepsilon'_i \mid \varepsilon_j)$ vaille 1 si $i = j$, 0 sinon.

Théorème 2.7 *Supposons W infini, essentiel et irréductible. Alors pour toute chambre C :*
(i) W contient des translations non nulles, donc il n'existe aucun point invariant par W.
(ii) Il y a exactement $dim(E)+1$ murs de C; il existe une relation $\sum_{i\in I} c_i\varepsilon_i = 0$ avec $c_i > 0$ pour tout $i \in I$.
(iii) C est un simplexe ouvert.

On rappelle qu'un *simplexe ouvert* est l'intérieur de l'enveloppe convexe de $n+1$ points affinement indépendants (dans un espace affine de dimension n). Un *cône simplicial ouvert* de sommet a de base $(f_1, \ldots, f_n)$ est l'ensemble des points qui s'écrivent $a + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n$ avec $\lambda_j > 0$.

3 Représentation géométrique des groupes de Coxeter.

3.1 Matrice d'un groupe de Coxeter.

Etant donné un système de Coxeter (W,S), on lui associe sa matrice de Coxeter $(m(s,s'))_{s,s'\in S}$, où on rappelle que $m(s,s')$ est l'ordre de ss' dans le groupe W. C'est une vraie matrice uniquement dans la cas où S est fini. On constate que :
•$m(s,s) = 1$ pour tout $s \in S$.
•$m(s,s') \geq 2$, si $s, s' \in S$ et $s \neq s'$.
•$m(s,s') = m(s',s)$, si $s, s' \in S$.
Plus généralement on appelle *matrice de Coxeter* toute matrice carrée, à coefficients dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, satisfaisant à ces trois propriétés.
Si deux groupes de Coxeter ont la même matrice, ils sont par définition isomorphes à $\Gamma/\mathcal{R}$ pour la même relation $\mathcal{R}$, donc isomorphes entre eux.
Dans la prochaine partie on va voir que toute matrice de Coxeter est matrice de Coxeter associée à un système de Coxeter.

3.2 Représentation géométrique.

Soit $M = (m(s,s'))_{s,s'\in S}$ une matrice de Coxeter. Soit $W = \Gamma/\mathcal{R}$ le groupe libre sur S quotienté par les relations $(ss')^{m(s,s')} = 1$, qui n'est pas a priori un groupe de Coxeter. Pour le prouver il faut et il suffit de montrer que $m(s,s')$ est effectivement l'ordre de ss' dans W.
On considère $V = \mathbb{R}^{(S)}$ muni de sa base canonique $(\varepsilon_s)_{s\in S}$. On définit sur V la forme bilinéaire $B : V \times V \to \mathbb{R}$ par $B(\varepsilon_s, \varepsilon_{s'}) = -cos(\frac{\pi}{m(s,s')})$.
Chacun des ε_s est non isotrope, donc il lui correspond une unique symétrie σ_s. On veut montrer que l'application $\sigma : S \to \mathrm{GL(V)}$ qui à $s \in S$ associe σ_s se prolonge en un morphisme sur W. D'après la propriété universelle du groupe libre sur S quotienté par les relations $(ss')^{m(s,s')} = 1$, il suffit de montrer que $(\sigma_s\sigma_{s'})^{m(s,s')} = 1$ dès que $m(s,s') < \infty$.

Lemme 3.1 *$\sigma_s\sigma_{s'}$ est d'ordre $m(s,s')$ dans GL(V).*

Démonstration :
Si $s = s'$ le lemme est trivial. Supposons désormais que $s \neq s'$. Soit $F_{s,s'}$ le plan $\mathbb{R}\varepsilon_s \oplus \mathbb{R}\varepsilon_{s'}$.
• Si $m(s,s) < \infty$ la forme B est définie positive sur $F_{s,s'}$ (car sa matrice dans la base $(\varepsilon_s, \varepsilon_{s'})$ est trivialement définie positive) et par conséquent c'est un sous espace non isotrope. Les symétries σ_s et $\sigma_{s'}$ fixent l'orthogonal pour B du plan $F_{s,s'}$, qui est supplémentaire à $F_{s,s'}$. Donc pour étudier l'ordre de $\sigma_s\sigma_{s'}$ il suffit de considérer leur action sur ce plan. Or $\sigma_{s|F}$ et $\sigma_{s'|F}$ sont deux symétries par rapport à deux droites qui font angle $\frac{\pi}{m(s,s')}$, donc $\sigma_s\sigma_{s'|F}$ est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{m(s,s')}$. Cela montre que $\sigma_s\sigma_{s'}$ est d'ordre $m(s,s')$.

• Si $m(s,s) = \infty$ on vérifie sans peine que $(\sigma_s\sigma_{s'})^k(\varepsilon_s) = 2k(\varepsilon_s + \varepsilon_{s'}) + \varepsilon_s$. Donc $\sigma_s\sigma_{s'}$ est d'ordre infini, ce qui termine la démonstration du lemme.

Théorème 3.2
(i) Il existe un unique morphisme $\sigma : W \to GL(V)$ qui envoie s sur σ_s.
(ii) $\sigma_s\sigma_{s'}$ est d'ordre $m(s,s')$ dans $GL(V)$.
(iii) $\sigma(W)$ préserve B(par abus on dira que W préserve B).

Démonstration : On a déjà vu la partie existence du (i) et le (ii). La partie unicité du (i) découle du fait que S engendre W. Pour la même raison dans le (iii) il suffit de montrer que les σ_s préservent B, ce qui est clair car ce sont des symétries orthogonales pour la forme bilinéaire B.

Corollaire 3.3 *(W,S) est un système de Coxeter de matrice M.*

Démonstration : Comme W est le groupe libre sur S quotienté par les relations $(ss')^{m(s,s')} = 1$, l'ordre de ss' dans W divise $m(s,s')$. De plus cet ordre est un multiple de l'ordre de $\sigma(ss') = \sigma_s\sigma_{s'}$ qui est exactement $m(s,s')$. D'après la remarque faite au début de ce paragraphe ceci suffit pour affirmer que (W,S) est un système de Coxeter de matrice M.

Remarque 3.4 *Dans cette partie on a essayé de construire (dans le cas où W est fini) une sorte de réciproque du théorème 2.4. En effet dans la deuxième section on avait trouvé une famille $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ de vecteurs unitaires, tels que $(\varepsilon_i|\varepsilon_j) = -cos(\frac{\pi}{m_{i,j}})$. Les hyperplans H_i par rapport auxquels s'effectuent les symétries de W étaient les orthogonaux des ε_i. Ici, on essaye de reconstituer les ε_i et la forme bilinéaire B en partant de la matrice $(m(s,s'))_{s,s'\in S}$. Il est donc naturel de poser $B(\varepsilon_i,\varepsilon_j) = -cos(\frac{\pi}{m(s,s')})$ et de construire les symétries σ_s (orthogonales pour B).*

3.3 Lien entre écriture et représentation géométrique d'un groupe de Coxeter.

L'ensemble S engendre le groupe W donc tout élément $w \in W$ s'écrit comme un produit $s_1s_2...s_r$ d'élements de S. Lorsque r est minimal on parle *d'écriture réduite* de w et r est alors appelé *la longueur* de w, notée $l(w)$. Si $w \in W$ et $s \in S$ il est facile de voir que $|l(ws)-l(w)| \leq 1$.

D'après la caractérisation 1.2 des groupes de Coxeter, étant donné un système de Coxeter (W,S), l'application $S \to \{-1,1\}, s \mapsto -1$ se prolonge en un morphisme $\epsilon : W \to \{-1,1\}$, appelé la signature.

Remarque 3.5 *Dans le cas du groupe symétrique on retrouve la signature habituelle.*

Ainsi si $w = s_1s_2...s_r = s'_1s'_2...s'_l$, avec $s_i \in S$ et $s'_j \in S$, alors r et l ont forcément la même parité. Ceci montre que si $w \in W$ et $s \in S$, alors $l(ws) = l(w) \pm 1$.

Le prochain théorème donne à l'aide de la représentation géométrique un critère pour chacun de ces cas.

Pour pouvoir l'énoncer adoptons les notations suivantes:

On va noter $w(v)$ au lieu de $\sigma(w)(v)$ pour tout $w \in W$ et $v \in V$. On définit l'ensemble $\Phi = \{w(\varepsilon_s)|w \in W, s \in S\}$ ainsi que ses sous ensembles Φ^+ et Φ^-, formés des éléments $\varepsilon \in \Phi$ qui s'écrivent comme combinaison linéaire à coefficients positifs (resp. négatifs) des $(\varepsilon_s)_{s\in S}$.

Théorème 3.6 *Soient $w \in W$ et $s \in S$. Alors $w(\varepsilon_s) \in \Phi^+$ si $l(ws) = l(w) + 1$ et $w(\varepsilon_s) \in \Phi^-$ si $l(ws) = l(w) - 1$.*

Ce théorème a deux conséquences importantes :

Corollaire 3.7 *La réunion de Φ^+ et de Φ^- donne Φ tout entier.*

Démonstration : Soit $w(\varepsilon_s)$ un élément de Φ, où $w \in W$ et $s \in S$. On a $l(ws) = l(w) \pm 1$, donc d'après le théorème $w(\varepsilon_s) \in \Phi^+$ ou $w(\varepsilon_s) \in \Phi^-$.

Corollaire 3.8 *La représentation $\sigma : W \to GL(V)$ est fidèle.*

Démonstration : Soit $w \in W \backslash \{1\}$ et soit $w = s_1..s_r$ une écriture réduite de w ($r \geq 1$). Alors $l(ws_r) < l(w)$ et donc d'après le théorème $w(\varepsilon_{s_r}) \in \Phi^-$. En particulier $w(\varepsilon_{s_r}) \neq \varepsilon_s$, car $\varepsilon_s \in \Phi^+$, et par conséquent $\sigma(w) \neq id$, d'où l'injectivité de σ.

Dans la suite on identifie, via la représentation fidèle σ, W et le sous-groupe de GL(V) engendré par les σ_s.

Proposition 3.9

(i) Pour tout $s \in S$ σ_s envoie ε_s sur $-\varepsilon_s$ et permute les autres éléments de Φ^+.

(ii) Pour tout $w \in W$ $l(w)$ est le nombre d'éléments de Φ^+ qui sont envoyés par w dans Φ^-.

Soit $\varepsilon = w(\varepsilon_s) \in \Phi$, où $s \in S$ et $w \in W$. D'après le théorème 3.2, on sait que W préserve B, donc $B(\varepsilon, \varepsilon) = B(\varepsilon_s, \varepsilon_s) = 1$. Par conséquent ε est un vecteur non isotrope et on peut donc définir la symétrie orthogonale correspondante s_ε. Posons $T = \{s_\varepsilon | \varepsilon \in \Phi\}$. On vérifie sans peine que $s_\varepsilon = wsw^{-1} \in W$, donc $S \subset T \subset W$. On a alors une généralisation naturelle du théorème 3.6 :

Proposition 3.10 *Soit $w \in W$ et $\varepsilon \in \Phi^+$. Alors $l(ws_\varepsilon) < l(w)$ si et seulement si $w(\varepsilon) \in \Phi^-$.*

Théorème 3.11 (Condition d'échange) *Soit $w \in W$ et soit $w = s_1 s_2 ... s_r$ une écriture, pas forcément réduite, de w comme produit d'éléments de S. Soit $t \in T$ tel que $l(wt) < l(w)$. Alors il existe i tel que $wt = s_1..s_{i-1}s_{i+1}..s_r$. Si de plus l'écriture de w est réduite l'indice i est unique.*

Démonstration : On a $\varepsilon \in \Phi^+$ tel que $t = s_\varepsilon$. Alors la proposition 3.10 implique $w(\varepsilon) \in \Phi^-$, d'où l'existence d'une indice $i \leq r$ telle que $s_{i+1}..s_r(\varepsilon) \in \Phi^+$, mais $s_i s_{i+1}..s_r(\varepsilon) \in \Phi^-$. Or, d'après le (i) de la proposition 3.9, le seul élément de Φ^+ dont l'image par s_i est dans Φ^- est ε_{s_i}, donc $s_{i+1}..s_r(\varepsilon) = \varepsilon_{s_i}$. D'après ce qui a été dit juste avant la proposition 3.10, on a alors $(s_{i+1}..s_r)t(s_r..s_{i+1}) = s_i$, ce qui donne l'égalité voulue $wt = s_1..s_{i-1}s_{i+1}..s_r$.

Si $l(w) = r$ supposons qu'on ait $i < j$ tels que $w = s_1..s_{i-1}s_{i+1}..s_r = s_1..s_{j-1}s_{j+1}..s_r$. Après simplification et multiplication par s_i, cela donne $s_i..s_j = s_{i+1}..s_{j-1}$ et donc $w = s_1..s_{i-1}s_{i+1}..s_{j-1}s_{j+1}..s_r$ ce qui contredit le fait que $l(w) = r$.

Remarque 3.12 *Plaçons nous dans le cas où l'écriture $w = s_1 s_2 ... s_r$ est réduite. D'après la condition d'échange il existe exactement r valeurs de $t \in T$ pour lesquelles $l(wt) < l(w)$, à savoir les $t_i = w^{-1}s_1..s_{i-1}s_{i+1}..s_r$, pour i allant de 1 à r. Il est facile de voir qu'il existe un unique élément $\varepsilon_i \in \Phi^+$ tel que $t_i = s_{\varepsilon_i}$. D'après la proposition 3.10, l'inégalité $l(wt_i) < l(w)$ se traduit par $w(\varepsilon_i) \in \Phi^-$. On a ainsi redémontré le (ii) de la proposition 3.9 qui dit que $l(w) = r = Card(\Phi^- \cap w(\Phi^+))$.*

Théorème 3.13 (Condition d'effacement) *Soit $w \in W$ et soit $w = s_1 s_2 ... s_r$ une écriture non réduite de w. Alors on peut en obtenir une écriture réduite en omettant un nombre pair des s_i.*

Démonstration : D'après les hypothèses on a une indice j tel que $l(s_1..s_{j-1}s_j) < l(s_1..s_{j-1})$. D'après la condition d'échange appliquée à $w = s_1..s_{j-1}$ et $t = s_j$ on a $i < j$ tel que $s_1..s_j = s_1..s_{i-1}s_{i+1}..s_{j-1}$, ou encore $w = s_1..s_{i-1}s_{i+1}..s_{j-1}s_{j+1}..s_r$. On termine par récurrence descendante sur r.

3.4 Sous-groupes paraboliques.

Soit (W,S) un système de Coxeter de matrice $M = (m(s,s'))_{s,s' \in S}$. On considère la représentation géométrique associée à (W,S).

Définition 3.14 *Soit I un sous-ensemble de S. Le groupe $W_I = <\sigma_s, s \in I>$ est appelé le sous groupe parabolique de W associé à $I \subset S$.*

Proposition 3.15 *(W_I, I) est un système de Coxeter de matrice $M = (m(s,s'))_{s,s' \in I}$.*

Théorème 3.16
(i) Pour tout $w \in W_I$ on a $l(w) = l_I(w)$, où $l_I(w)$ est la longueur de w en tant qu'élément de W_I.
(ii) L'application qui à $I \subset S$ associe W_I est une bijection entre les sous-ensembles de S et les sous-groupes paraboliques de W qui préserve l'inclusion.
(iii) S est un système générateur minimal de W.

Démonstration : (i) On raisonne par récurrence sur $l(w)$. Pour $l(w) = 0$ c'est trivial. Supposons le résultat vrai pour tous les éléments plus courts que w. On peut trouver $s \in I$ et $w' \in W_I$ tels que $w = w's$ avec $l_I(w') < l_I(w)$. Alors d'après le théorème 3.6 appliqué au système de Coxeter (W_I, I) on voit que $w(\varepsilon_s)$ est combinaison linéaire à coefficients positifs des $(\varepsilon_s)_{s \in I}$, donc a fortiori des $(\varepsilon_s)_{s \in S}$. En appliquant théorème 3.6 dans l'autre sens au système de Coxeter (W, S), on obtient que $l(w') < l(w)$. Finalement $l(w) = l(w') + 1 = l_I(w') + 1 = l_I(w)$, ce qui termine la récurrence.

(ii) Le seul point non trivial à vérifier est que $I \neq J$ implique $W_I \neq W_J$. Supposons que par exemple $s \in I \backslash J$. Alors $s \in W_I$ et $l(s) = 1$. Si on suppose que $s \in W_J$, on aurait d'après (i) que $l_J(s) = 1$, ce qui signifierait que $s \in J$. Donc $s \in W_I \backslash W_J$, ce qui démontre le (ii).

(iii) C'est une conséquence directe du (ii), car on vient de voir que $W \neq W_{S \backslash \{s\}}$, pour tout $s \in S$.

4 Application aux algèbres de Lie semi-simples complexes.

4.1 Introduction des systèmes de racines.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension finie. Elle possède une sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{h}$ qui agit diagonalement sur $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe. Ceci veut dire que le morphisme d'algèbres de Lie $ad : \mathfrak{h} \to gl(\mathfrak{g}) \quad H \mapsto (X \mapsto [H, X])$ est diagonalisable.

L'algèbre $\mathfrak{h}$ est appelée *sous-algèbre de Cartan* de l'algèbre $\mathfrak{g}$.

Ainsi $\mathfrak{g}$ se décompose en somme directe de sous-espaces propres :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \Big(\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^* \backslash \{0\}} \mathfrak{g}_\alpha \Big)$$

où $\mathfrak{h}$ agit sur $\mathfrak{g}_\alpha$ par : $[H, X] = <\alpha, H> X$ pour $H \in \mathfrak{h}$ et $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, où $< \ , \ >$ désigne le crochet de dualité (voir [SER] VI, §1).

Comme $\mathfrak{g}$ est de dimension finie cette somme porte sur un nombre fini de $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, qui sont appelés les *racines* de $\mathfrak{g}$. On note R l'ensemble des racines. Par convention $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ et 0 n'est pas considéré comme racine.

Soit $\alpha \in R$. Alors $-\alpha \in R$ et l'algèbre $sl_2(\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ isomorphe à $sl_2(\mathbb{C})$ ([FUL] II, §14.1, p.200). Notons que $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}$, car d'après un calcul simple pour tous $\alpha, \beta \in R$ on a $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. On peut prendre $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ et $H_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}$ qui engendrent $sl_2(\alpha)$ et qui vérifient les relations $[H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha$, $[H_\alpha, Y_\alpha] = -2Y_\alpha$ et $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$(voir [FUL] II, §14.1, p.200).

D'autre part on a $[H_\alpha, X_\alpha] =< \alpha, H_\alpha > X_\alpha$, donc $< \alpha, H_\alpha >= 2$.

Ceci permet de définir la symétrie s_α dans $\mathfrak{h}^*$ par : pour $\beta \in \mathfrak{h}^*$ $s_\alpha(\beta) = \beta - < \beta, H_\alpha > \alpha$.

Comme $ad_{|sl_2(\alpha)}$ est une représentation sur $\mathfrak{g}$ de $sl_2(\alpha)$, et comme $sl_2(\alpha)$ est isomorphe à $sl_2(\mathbb{C})$, la théorie générale des représentations de $sl_2(\mathbb{C})$(voir [FUL] II, §11.1) nous assure que :

(i) Les valeurs propres de $ad(H_\alpha)$ sont des entiers.

(ii) Les valeurs propres de $ad(H_\alpha)$ sont symétriques par rapport à 0.

De plus les valeurs propres de $ad(H_\alpha)$ sont les $< \beta, H_\alpha >$ pour $\beta \in R$, qui sont donc entiers. La propriété (ii) permet de montrer que s_α laisse stable R.

Ceci motive la définition abstraite suivante :

Définition 4.1 *Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et R une partie de V. On dit que R est un système de racines dans V si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(SR i) R est fini, ne contient pas 0 et engendre V.

(SR ii) Pour tout $\alpha \in R$ il existe $H_\alpha \in V^*$ tel que $< \alpha, H_\alpha >= 2$ et tel que la réflexion s_α, par rapport à l'hyperplan $ker H_\alpha$ et parallèlement à α, laisse stable R.

(SR iii) Pour tous α et $\beta \in R$ on a $< \beta, H_\alpha > \in \mathbb{Z}$.

Conséquence : Si α et β sont deux racines proportionnelles, disons $\beta = \lambda\alpha$ avec $\lambda \in K$, on aura :

$$< \beta, H_\alpha >= \lambda < \alpha, H_\alpha >= 2\lambda \in \mathbb{Z}$$

et de même $< \alpha, H_\beta >= \frac{2}{\lambda} \in \mathbb{Z}$. On en déduit que les valeurs possibles pour λ sont $\pm 1, \pm 2$ et $\pm \frac{1}{2}$.

On dit qu'un système de racines est *réduit* si λ ne vaut jamais ± 2 ni $\pm \frac{1}{2}$.

Proposition 4.2 *Le système de racines R associé à une algèbre de Lie semi-simple complexe est un système de racines réduit, qui ne dépend pas (à isomorphisme près) de l'algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ choisie.*

Démonstration : On a déjà montré au début de ce paragraphe les axiomes (SR ii) et (SR iii), et la finitude de R. On admet que R est réduit, engendre V et ne dépend pas de $\mathfrak{h}$ (voir [SER] VI, §2 et §5).

Remarque 4.3 *Le système de racines de $\mathfrak{g}$ est un système de racines complexe. Comme dans la suite on étudiera les systèmes de racines réels, voici une méthode pour s'y ramener (voir aussi [SER] V, §17) :*

On note V_0 le $\mathbb{R}$-sous-espace de V engendré par R. Il est facile de vérifier que R est un système de racines dans V_0. La question est de savoir si on peut remonter à V, c'est-à-dire si V est canoniquement isomorphe à $V_0 \otimes \mathbb{C}$. Pour ceci il suffit de montrer que $V_0 \oplus iV_0 = V$, ou encore que $V_0 \cap iV_0 = \{0\}$. C'est vrai car si on prend $x \in V_0 \cap iV_0$, alors pour tout $\alpha \in R$ $< x, H_\alpha > \in \mathbb{R}$ (car $< R, H_\alpha > \subset \mathbb{Z}$ et R engendre V_0 comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel) et de même $< x, H_\alpha > \in i\mathbb{R}$. Donc pour tout $\alpha \in R$ $< x, H_\alpha >= 0$.

Or on peut démontrer que $(H_\alpha)_{\alpha \in R}$ est un système de racines dans V_0^*, appelé système *inverse* ou *dual* de R (voir [SER] V, §6, Proposition 2). En particulier $(H_\alpha)_{\alpha \in R}$ engendre V_0^*, ce qui montre que $x = 0$.

Dans la suite on pourra donc s'intéresser uniquement aux systèmes de racines réels.

4.2 Groupe de Coxeter associé à un système de racines.

Soit R un système de racines dans un espace vectoriel réel V. Soit W le sous-groupe de GL(V)engendré par les s_α pour $\alpha \in R$. Alors les éléments de W permutent les racines (car les s_α agissent ainsi); comme R engendre V, W s'injecte dans le groupe des permutations de R. Donc W est fini.

Sur V il existe une forme bilinéaire symétrique définie positive, notée Ψ. Comme W est fini, on définit un produit scalaire invariant par les éléments de W en posant pour $x, y \in V$:

$$(x \mid y) = \sum_{w \in W} \Psi(wx, wy).$$

Il existe donc un produit scalaire invariant par les éléments de W. Désormais on suppose V muni d'un tel produit scalaire. Ainsi V est un espace euclidien et les éléments de W sont des isométries. En particulier les symétries s_α sont orthogonales.

Les hypothèses de la partie 2 sont vérifiées, ce qui montre que le groupe W associé au système de racines R est un groupe de Coxeter. On a la propriété suivante :

Proposition 4.4 *Soit R un système de racines, W le groupe de Coxeter associé à R. Alors :*
(i) W est fini.
(ii) W est cristallographique, ce qui signifie (par définition) que pour α et β racines distinctes on a $m(s_\alpha, s_\beta) \in \{2, 3, 4, 6, \infty\}$.

Bien sûr, il résulte de ces deux assertions qu'on a en fait $m(s_\alpha, s_\beta) \in \{2, 3, 4, 6\}$, puisque l'ordre d'un élément dans un groupe fini est fini.

Démonstration : Les éléments de W stabilisent R, donc le réseau $L = Vect_{\mathbb{Z}}(R)$. Dans une $\mathbb{Z}$-base de L, la matrice de chaque élément $w \in W$ est à coefficients entiers, donc $tr(w) \in \mathbb{Z}$. Soit maintenant une base adaptée à la décomposition de l'espace euclidien V en somme directe de $Vect_{\mathbb{R}}(\alpha, \beta)$ et de son orthogonal, pour $\alpha, \beta \in R$, $\alpha \neq \beta$. Supposons $m(s_\alpha, s_\beta)$ fini. Alors l'isométrie $s_\alpha s_\beta$ agit comme l'identité sur l'orthogonal et comme une rotation d'angle $\frac{2\pi}{m(s_\alpha, s_\beta)}$ sur $Vect(\alpha, \beta)$. La trace de $s_\alpha s_\beta$ est donc : $(dim(V) - 2) + 2cos\frac{2\pi}{m(s_\alpha, s_\beta)}$. Cela montre que $2cos\frac{2\pi}{m(s_\alpha, s_\beta)} \in \mathbb{Z}$, d'où le (ii) de la proposition.

Le fait d'avoir associé un groupe de Coxeter à tout système de racines permet la définition suivante :

Définition 4.5 *Un système de racines R est dit irréductible si le groupe de Coxeter qui lui est associé est irréductible.*

En fait, on peut caractériser les systèmes de racines irréductibles comme étant ceux qui peuvent pas être obtenus (de façon non triviale) à partir de systèmes de racines dans des supplémentaires orthogonaux de V (si R_1 et R_2 sont de tels systèmes de racines alors $R = R_1 \cup R_2$ est un système de racines dans V). Cette notion acquiert une grande importance du fait de la proposition suivante (voir [SER] VI, §5, Corollaire) :

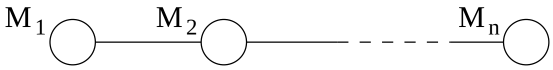
Proposition 4.6 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, et R le système de racines associé. Alors $\mathfrak{g}$ est simple si et seulement si R est irréductible.*

L'objectif de la fin de cette partie est de classifier les algèbres de Lie simples complexes. C'est pourquoi on s'intéresse désormais aux systèmes de racines réduits (d'après le paragraphe 4.1) et irréductibles.

4.3 Graphe de Coxeter et graphe de Dynkin.

A tout groupe de Coxeter W on peut associer un graphe, dont les sommets correspondent aux éléments de S, deux sommets distincts s et s' étant liés si et seulement si $m(s,s') \geq 3$. De plus sur l'arête reliant s à s' on indique la valeur $m(s,s')$, sauf si elle vaut 3 auquel cas elle est sous-entendue.

Par exemple, dans le cas du groupe symétrique $\mathfrak{S}_{n+1}$, qui forme un groupe de Coxeter noté A_n (d'après le corollaire 2.2), le graphe de Coxeter associé a n sommets, notés $M_1, \ldots, M_n$, le sommet M_i correspondant à la transposition τ_i entre i et $i+1$ dans $\{1, \ldots, n+1\}$. Dans $\mathfrak{S}_{n+1}$, l'ordre de $\tau_i \tau_j$ est 1 si $i = j$, 3 si $| j - i | = 1$, et 2 sinon. On en déduit le graphe de Coxeter :



Soit maintenant R un système de racines réduit et irréductible. On peut lui associer un graphe (dit graphe de Coxeter) de la manière précédente. On note $\mathcal{G}$ ce graphe. On peut montrer (voir [BOU2] V, §3.7, Corollaire et §4.8, Corollaire) que $\mathcal{G}$ est connexe (cela résulte du caractère irréductible de R), et que c'est un arbre (cela provient de la finitude de W). De plus si s et s' sont deux sommets distincts on a $m(s,s') \in \{2,3,4,6\}$, d'après la proposition 4.4.

Le graphe $\mathcal{G}$ permet de connaître les angles non orientés (pour un produit scalaire invariant par les éléments de W) entre deux racines distinctes α et β : il vaut $\frac{\pi}{m(s_\alpha,s_\beta)}$, puisque la rotation $s_\alpha s_\beta$ est d'ordre $m(s_\alpha,s_\beta)$ donc d'angle $\frac{2\pi}{m(s_\alpha,s_\beta)}$.

Cherchons maintenant à caractériser les normes des racines. Pour cela, posons $n(\alpha,\beta) =< \alpha, H_\beta >\in \mathbb{Z}$. Comme les symétries s_α sont orthogonales pour le produit scalaire de V, on a $n(\alpha,\beta) = \frac{2(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)}$. D'où $n(\alpha,\beta)n(\beta,\alpha) = \frac{4(\alpha|\beta)^2}{\|\alpha\|^2\|\beta\|^2} = 4cos^2\Phi$ où Φ désigne l'angle entre α et β. Donc $4cos^2\Phi$ est un entier compris entre 0 et 4. Supposons α et β non proportionnelles et telles que $m(s_\alpha,s_\beta) \geq 3$, c'est-à-dire $\Phi \neq \frac{\pi}{2}$. Alors cet entier vaut 1, 2 ou 3, ce qui fixe la valeur de $n(\alpha,\beta)$ et celle de $n(\beta,\alpha)$ (à l'échange près de α et β), donc celle de $\frac{n(\alpha,\beta)}{n(\beta,\alpha)} = \frac{\|\alpha\|^2}{\|\beta\|^2}$. On est donc dans l'un des 4 cas suivants, dès que les racines α et β ne sont pas proportionnelles, et à l'échange près de ces deux racines :

- $m(s_\alpha,s_\beta) = 2$, on ne peut rien dire sur les normes de α et β.
- $m(s_\alpha,s_\beta) = 3$, $\|\alpha\| = \|\beta\|$.
- $m(s_\alpha,s_\beta) = 4$, $\|\alpha\| = \sqrt{2}\|\beta\|$.
- $m(s_\alpha,s_\beta) = 6$, $\|\alpha\| = \sqrt{3}\|\beta\|$.

On voit donc que le graphe de Coxeter ne caractérise pas R, puisque dès qu'une arête est surmontée d'un 4 ou d'un 6, il y a ambiguïté : le graphe ne permet pas de savoir quelle racine a une norme plus grande que l'autre. On construit donc le *graphe de Dynkin* associé à R comme suit : à partir du graphe de Coxeter $\mathcal{G}$ associé à R, on remplace les arêtes surmontées d'un 4 par une double flèche orientée de la racine longue vers la courte, et de même avec une triple flèche dans le cas d'une arête surmontée d'un 6.

Le graphe de Dynkin est donc plus fin que le graphe de Coxeter : il arrive que deux système de racines (réduits, irréductibles) non isomorphes aient le même graphe de Coxeter mais pas le même graphe de Dynkin (voir B_n et C_n dans la classification plus bas). On montre (voir [BOU2] VI, 4.2, Proposition 1) le résultat suivant :

Théorème 4.7 *Le graphe de Dynkin d'un système de racines réduit irréductible caractérise ce système de racines, c'est-à-dire que deux systèmes de racines réduits irréductibles ayant le même graphe de Dynkin sont isomorphes.*

4.4 Classification des algèbres de Lie simples complexes.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple complexe. Par les propositions 4.2 et 4.6, il lui est associé un système de racines réduit irréductible. De plus ce système caractérise $\mathfrak{g}$ à isomorphisme près (voir [SER] VI, §5).

A ce système de racines réduit irréductible est associé un graphe de Dynkin qui le caractérise (d'après le théorème 4.7). Si on donne une liste de graphes de Dynkin, on en déduira donc une liste parmi laquelle se trouveront toutes les algèbres de Lie simples complexes.

La classification se trouve détaillée dans [BOU2] VI, 4.1 et 4.2 et les résultats se trouvent dans le tableau ci-dessous. On commence par classifier les groupes de Coxeter finis cristallographiques, en utilisant la forme B définie au paragraphe 3.2, qui se trouve être proportionelle au produit scalaire défini au 4.3; l'argument essentiel est d'utiliser qu'elle est définie positive. Puis on obtient facilement les graphes de Dynkin : à partir d'un graphe de Coxeter, on obtient plusieurs graphes de Dynkin lorsqu'il y a des arêtes surmontées de 4 ou de 6, car on peut choisir l'orientation des flèches du graphe de Dynkin. En fait, dans le cas de F_4 et de G_2 (voir tableau ci-dessous) on obtient des graphes de Dynkin identiques quel que soit le sens choisi.

On trouve donc 9 types de graphes de Dynkin, d'où au plus 9 types d'algèbres de Lie simples complexes. Réciproquement on peut construire des systèmes de racines (voir [SER] V, 16 ou [BOU2] VI, 4.4 à 4.13) puis des algèbres de Lie simples complexes (voir [SER] VI, Appendice) ayant chacun de ces graphes pour graphe de Dynkin. On a donc la liste des algèbres de Lie simples complexes : il y en a 4 familles infinies, et 5 exceptionnelles (voir le tableau de la page suivante).

Références

[BOU1] N. Bourbaki, *Algèbre, Chapitres 1 à 3*, Hermann, 1970.

[BOU2] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6*, Hermann, 1968.

[FUL] W. Fulton & J. Harris, *Representation theory, a first course*, Springer, 1996.

[SER] J.P. Serre, *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, Benjamin, 1966.

Tableau de classification

	Graphe de Coxeter fini cristallographique	Graphe de Dynkin	Algèbre de Lie simple complexe
$(A_n)_{n\geq 1}$			$\mathfrak{s}l_{n+1}(\mathbb{C})$
$(B_n)_{n\geq 2}$			$\mathfrak{s}\mathrm{o}_{2n+1}(\mathbb{C})$
$(C_n)_{n\geq 3}$			$\mathfrak{s}p_{2n}(\mathbb{C})$
$(D_n)_{n\geq 4}$			$\mathfrak{s}o_{2n}(\mathbb{C})$
(E_6)			$\mathfrak{e}_6$
(E_7)			$\mathfrak{e}_7$
(E_8)			$\mathfrak{e}_8$
(F_4)			$\mathfrak{f}_4$
(G_2)			$\mathfrak{g}_2$

Remarque : L'indice n dans le nom du graphe désigne son nombre de sommets.