Quelques problèmes d'approximation diophantienne

Habilitation à Diriger des Recherches

Stéphane Fischler

Université Paris-Sud, Orsay

8 Décembre 2010

Plan de l'exposé

Plan

Lemme de zéros lié à une action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{G}_m^2$

Théorème (avec Nakamaye, soumis)

Soient $M, N \geq 1$, $x, y \in \mathbb{C}^*$, *et* $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ *non nul. Supposons que :*

- *Les points* $(x^a y^b, x^c y^d) \in (\mathbb{C}^*)^2$ *obtenus pour* $1 \leq a, b, c, d \leq N$ *avec* $ad - bc = 1$ *sont deux à deux distincts.*
- *Le polynôme* P *s'y annule à l'ordre* M *(au moins).*
- *Le point* (x, y) *n'appartient pas à un certain ensemble fini* Σ_N.
- N *est plus grand qu'une certaine constante absolue.*

Alors on a $\deg P \geq \frac{1}{4} MN$.

Remarques et programme de recherches

- Optimal à la valeur près de la constante $\frac{1}{4}$.
- Premier lemme de zéros précis avec un groupe algébrique non commutatif.
- Motivé par une construction de Roy pour étudier les points de la grassmannienne à coordonnées logarithmes de nombres algébriques (cf. Acta Arithmetica 2001).
- *Preuve :* minoration d'une constante de Seshadri, où (x, y) varie :
  - Démontrée si $x = 1$ ou $y = 1$ (réseau),
  - Donc vraie sur un ouvert (amplitude).
- Méthode susceptible d'autres applications (en cours).

Lemme d'interpolation dans un groupe alg. comm.

- $G \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ groupe algébrique commutatif connexe sur $\mathbb{C}$.
- $\overline{G}$ adhérence de Zariski de G ; $\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell \in G(\mathbb{C})$.
- W sous-espace vectoriel de $\mathrm{Lie}(G)$.
- Pour $S, T > 0$, on note $Y_{S,T}$ le sous-schéma fermé de $\overline{G}$ formé par les points de la forme $n_1\gamma_1 + \ldots + n_\ell\gamma_\ell$ avec $0 \leq n_j < S$, épaissis à l'ordre T le long de W.

Théorème (Compositio Math., 2005)

Si D est assez grand alors le morphisme d'évaluation

$$H^0(\overline{G}, \mathcal{O}(D)) \to H^0(Y_{S,T}, \mathcal{O}(D))$$

est surjectif.

Sans multiplicités : Masser, 1982.

Le cas linéaire

Pour G linéaire, formulation en termes d'algèbres de Hopf :

- Lemmes de zéros,
- Lemmes d'interpolation,
- Dualité de Fourier-Borel.

Plan

Irrationalité de valeurs de zêta

Définition (fonction zêta de Riemann)

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$; *ici* s *entier,* $s \geq 2$.

Propriété

Si s *est pair alors* $\zeta(s) = c_s \pi^s$ *avec* $c_s \in \mathbb{Q}^*$*, donc* $\zeta(s) \notin \bar{\mathbb{Q}}$.

Théorème (Apéry, 1978)

$\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$.

Théorème (Rivoal, 2000 ; Ball-Rivoal, 2001)

$\zeta(s) \notin \mathbb{Q}$ *pour une infinité de* s *impairs.*

- Exposé au Séminaire Bourbaki, 2002.
- Conjecture : π, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, ..., alg. indép. sur $\mathbb{Q}$.

Preuve de Rivoal et Ball-Rivoal

- Symbole de Pochhammer $(k)_p = k(k+1)\dots(k+p-1)$.
- Pour $a \geq 3$ impair, $1 \leq r < a/2$ et n pair, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-rn)_{rn}(k+n+1)_{rn}}{(k)_{n+1}^a}.$$

- On a

$$S_n = \ell_{0,n} + \ell_{3,n}\zeta(3) + \ell_{5,n}\zeta(5) + \ldots + \ell_{a,n}\zeta(a)$$

très petit quand $n \to \infty$, avec $\ell_{i,n} \in \mathbb{Q}$ à dénominateur contrôlé.
- Le critère de Nesterenko donne

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \zeta(3), \zeta(5), \ldots, \zeta(a)) \geq \frac{1+o(1)}{1+\log 2} \log a.$$

Définition des polyzêtas

Définition

On appelle polyzêtas *les séries multiples de la forme*

$$\zeta(s_1, s_2, \ldots, s_p) = \sum_{k_1 > k_2 > \cdots > k_p \geq 1} \frac{1}{k_1^{s_1} k_2^{s_2} \cdots k_p^{s_p}}$$

avec $p \geq 0$, $s_1 \geq 2$ *et* $s_2, \ldots, s_p \geq 1$.
L'entier p *s'appelle la* profondeur *et* $s_1 + s_2 + \cdots + s_p$ *le* poids.

- Pour $p = 0$, on pose $\zeta(s_1, s_2, \ldots, s_p) = 1$.
- Apparaissent en physique théorique, théorie des noeuds, ...
- Structure algébrique intéressante.

Résultat général de décomposition

Théorème (avec Cresson et Rivoal, Bull. SMF, 2008)

Soient $P \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_p]$, $A_1, \ldots, A_p \in \mathbb{N}^\star$, $n_1, \ldots, n_p \in \mathbb{N}$. *Si la série*

$$\sum_{k_1 \geq \cdots \geq k_p \geq 1} \frac{P(k_1, \ldots, k_p)}{(k_1)_{n_1+1}^{A_1} \cdots (k_p)_{n_p+1}^{A_p}}$$

est convergente, alors elle s'écrit comme une combinaison linéaire à coefficients rationnels en les polyzêtas de profondeur $\leq p$ *et de poids* $\leq \sum_{j=1}^{p} A_j$.

Contient les constructions de Rivoal, Sorokin, Vasilyev, ...

Remarques

- Démontré indépendamment par Zlobin ; mais se généralise aux polylogarithmes multiples en p variables.
- Utilise la régularisation des polyzêtas divergents.
- Preuve algorithmique, implémentée sous GP/Pari $\rightsquigarrow$ tests grâce à Medicis.

Premier phénomène de symétrie

Théorème (avec Cresson et Rivoal, J. Reine Angew. Math., 2008)

Sous certaines conditions de symétrie (très restrictives) sur P, toute série convergente

$$\sum_{k_1 \geq \cdots \geq k_p \geq 1} \frac{P(k_1, \ldots, k_p)}{(k_1)_{n_1+1}^{A_1} \cdots (k_p)_{n_p+1}^{A_p}}$$

s'écrit comme une combinaison $\mathbb{Q}$-linéaire de polyzêtas $\zeta(s_1, \ldots, s_q)$ avec $s_1, \ldots, s_q$ impairs.

Objectif : Résultat d'irrationalité non trivial sur les polyzêtas.

Deuxième phénomène de symétrie

Théorème (J. of Algebra, 2008)

Sous des conditions de symétrie beaucoup moins restrictives sur P, toute série convergente

$$\sum_{k_1 \geq \cdots \geq k_p \geq 1} \frac{P(k_1, \ldots, k_p)}{(k_1)_{n_1+1}^{A_1} \cdots (k_p)_{n_p+1}^{A_p}}$$

s'écrit comme une combinaison $\mathbb{Q}$-linéaire de polyzêtas dans laquelle en profondeur p on a seulement des $\zeta(s_1, \ldots, s_p)$ avec $s_1, \ldots, s_p$ impairs.

Résultat diophantien avec $\log 2$

Théorème (avec Zudilin, Math. Annalen, 2010)

Il existe un entier impair $j \in \{3, 5, \dots, 93\}$ tel que 1, $\log 2$ et $\zeta(j)$ soient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

- Nouvelle construction des formes linéaires, avec a pair et $r < a$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(k + \frac{n}{2}\right) \frac{(k - rn)_{rn}(k + n + 1)_{rn}}{\prod_{j=0}^{2n}(k + j/2)^a}$$

- Troisième phénomène de symétrie.
- Autre écriture : facteur $(-1)^k$ dans la somme.

Programme de recherches

- Unifier ces trois phénomènes de symétrie :

$$\sum_{k_1 \geq \cdots \geq k_p \geq 1} \frac{P(k_1, \ldots, k_p)}{(k_1)_{n_1+1}^{A_1} \cdots (k_p)_{n_p+1}^{A_p}} z_1^{k_1} \cdots z_p^{k_p}$$

avec $z_1, \ldots, z_p$ racines de l'unité.

- Symétrie pour les intégrales utilisées par Brown pour démontrer la conjecture de Goncharov-Manin ?

Plan

Exposant d'irrationalité

Définition

*L'*exposant d'irrationalité *de* $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *est la borne supérieure* $\mu(\xi)$ *de l'ensemble des* μ *tels qu'il existe une infinité de fractions* p/q *vérifiant* $|\xi - p/q| \leq q^{-\mu}$.

Utile en systèmes dynamiques, ...

Théorème (Apéry, 1978)

$\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$ *et* $\mu(\zeta(3)) \leq 13,41\ldots$

Amélioré ensuite par Hata, Rhin-Viola, ...
J. Théor. Nombres Bordeaux, 2003 : changements de variables entre intégrales n-uples.

Une remarque de Khintchine (1926)

- *Problème :* Soit $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Trouver les $\tau > 0$ tels que, pour tout H assez grand, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\underline{0}\}$ avec

$$\max(|u|, |v|) \leq H \quad \text{et} \quad |u\xi - v| \leq H^{-\tau}.$$

- *Réponse :* ce sont exactement les $\tau \leq 1$.
- *Preuve :* notons $\frac{p_n}{q_n}$ les réduites de $\xi \in [0, 1]$; si $q_n \leq H < q_{n+1}$, alors
  - Avec $\tau = 1$, $\frac{v}{u} = \frac{p_n}{q_n}$ convient.
  - Si $\tau > 1$ convient alors pour $H = q_{n+1} - 1$ on a

$$|u\xi - v| \leq H^{-\tau} < \frac{1}{2q_{n+1}} < |q_n\xi - p_n|, \text{ contradiction.}$$

Deux modifications

- *Pour tout H* assez grand $\rightsquigarrow$ $H = Q_n$ où (Q_n) suite strictement croissante d'entiers, telle que $Q_{n+1} = Q_n^{1+o(1)}$.

  Cela ne change pas la borne sup. des τ qui conviennent.

- On demande aussi une minoration de la forme linéaire :

$$|u_n \xi - v_n| = Q_n^{-\tau + o(1)}.$$

Cela évite les réduites, et change tout !

Majorations de l'exposant d'irrationalité

Lemme (classique)

Soient $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\tau > 0$, *et* (Q_n) *une suite strictement croissante d'entiers telle que* $Q_{n+1} = Q_n^{1+o(1)}$.
Supposons qu'il existe des suites d'entiers (u_n) *et* (v_n) *avec*

$$\max(|u_n|, |v_n|) \leq Q_n \qquad \text{et} \qquad |u_n\xi - v_n| = Q_n^{-\tau+o(1)}.$$

Alors on a $\tau \leq \frac{1}{\mu(\xi)-1}$, *i.e.* $\mu(\xi) \leq 1 + \frac{1}{\tau}$.

Théorème (avec Rivoal, Proc. AMS, 2010)

Si $\tau < \frac{1}{\mu(\xi)-1}$ *alors il existe de telles suites.*

Remarques et généralisation

- Répond aux questions posées précédemment (IMRN, 2006).
- Preuve : suite de Farey.
- En outre $d_n^3 | u_n$ (avec $d_n = \mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, n)$) dans la construction d'Apéry. Permet de majorer, pour $\xi = \zeta(3)$, un nouvel exposant d'approximation rationnelle restreinte.

Théorème (Indag. Math., 2009)

Il existe une partie de $\mathbb{R}$, définie par des conditions diophantiennes, qui ne contient pas $\zeta(3)$ et dont la dimension de Hausdorff est 0.5745...

Plan

Retour sur la remarque de Khintchine

- *Problème :* Soit $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Trouver les $\tau > 0$ tels que, *pour tout* H assez grand, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\underline{0}\}$ avec

$$\max(|u|, |v|) \leq H \qquad \text{et} \qquad |u\xi - v| \leq H^{-\tau}.$$

- *Réponse :* ce sont exactement les $\tau \leq 1$.
- *On ne bat jamais le principe des tiroirs.*

Conséquence de la remarque de Khintchine

Proposition

Soient $\xi_0, \ldots, \xi_r \in \mathbb{R}$, *avec* $r \geq 1$. *Soit* (Q_n) *une suite d'entiers strictement croissante, telle que* $Q_{n+1} = Q_n^{1+o(1)}$. *Si pour tout* n *assez grand il existe* $\ell_{0,n}, \ldots, \ell_{r,n} \in \mathbb{Z}$ *tels que*

$$\max_{0 \leq i \leq r} |\ell_{i,n}| \leq Q_n \quad \text{et} \quad 0 \neq |\ell_{0,n}\xi_0 + \ldots + \ell_{r,n}\xi_r| \leq Q_n^{-\tau}$$

avec $\tau > 1$, *alors* $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\xi_0, \ldots, \xi_r) \geq 3$.

- Critère de Nesterenko si $|\ell_{0,n}\xi_0 + \ldots + \ell_{r,n}\xi_r| = Q_n^{-\tau+o(1)}$.
- Raffinement : avec Zudilin, Math. Annalen, 2010.

Généralisation (Jarník, Bugeaud, Laurent,...)

- *Problème :* Soient $\xi_0, \ldots, \xi_r \in \mathbb{R}$, avec $r \geq 1$. Trouver les τ t.q. *pour tout* H assez grand il existe $u_0, \ldots, u_r \in \mathbb{Z}$ avec

$$\max |u_i| \leq H \qquad \text{et} \qquad 0 \neq |u_0\xi_0 + \ldots + u_r\xi_r| \leq H^{-\tau}.$$

- *Tiroirs :* tous les $\tau < \dim \mathrm{Vect}(\xi_0, \ldots, \xi_r) - 1$ conviennent.
- *Exemple* où n'importe quel τ convient :

$$\xi_0 = 1, \qquad \xi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{(2k+1)!}}, \qquad \xi_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{(2k)!}}.$$

- Si $10^{(2k-1)!} \leq H < 10^{(2k)!}$ on a $|p_k\xi_0 + 10^{(2k-1)!}\xi_1| \leq H^{-(2k+1)}$.
- Si $10^{(2k)!} \leq H < 10^{(2k+1)!}$ on a $|p'_k\xi_0 + 10^{(2k)!}\xi_2| \leq H^{-(2k+2)}$.

- *Avec en plus une minoration : ça va tout changer !*

Généralisation avec minoration de la forme linéaire

- *Problème :* Soient $\xi_0, \dots, \xi_r \in \mathbb{R}$, avec $r \geq 1$. Trouver les τ t.q. *pour tout* H assez grand il existe $u_0, \dots, u_r \in \mathbb{Z}$ avec
$$\max |u_i| \leq H \qquad \text{et} \qquad |u_0\xi_0 + \ldots + u_r\xi_r| = H^{-\tau + o(1)}.$$
- *Conjecture :* pour presque tout $(\xi_0, \dots, \xi_r)$, tous les $\tau < \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\xi_0, \dots, \xi_r) - 1 = r$ conviennent.
- *Exemple* où aucun $\tau > 0$ ne convient :
$$\xi_0 = 1, \qquad \xi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{(2k+1)!}}, \qquad \xi_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{(2k)!}}.$$
- *Théorème (Nesterenko, 1985) :* aucun $\tau > \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\xi_0, \dots, \xi_r) - 1$ ne convient jamais.
- *On ne bat jamais l'heuristique du principe des tiroirs.*

Critère d'indépendance linéaire de Nesterenko

Théorème (Nesterenko, 1985)

Soient $\xi_0, \ldots, \xi_r \in \mathbb{R}$, *avec* $r \geq 1$. *Soit* $\tau > 0$.
Soit (Q_n) *une suite d'entiers, strictement croissante, telle que* $Q_{n+1} = Q_n^{1+o(1)}$.
Soit $\ell_{i,n} \in \mathbb{Z}$ *pour* $0 \leq i \leq r$ *et* $n \geq 1$. *Supposons :*

$$|\ell_{i,n}| \leq Q_n \textit{ pour tous } i, n$$

et

$$|\ell_{0,n}\xi_0 + \ldots + \ell_{r,n}\xi_r| = Q_n^{-\tau+o(1)}.$$

Alors $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\xi_0, \ldots, \xi_r) \geq \tau + 1$.

Raffinement du critère de Nesterenko

Théorème (avec Zudilin, Math. Annalen, 2010)

Soient $\xi_0, \dots, \xi_r \in \mathbb{R}$, *avec* $r \geq 1$, $\tau > 0$ *et* $\gamma_1, \dots, \gamma_r \geq 0$. *Soit* (Q_n) *une suite d'entiers, strictement croissante, telle que* $Q_{n+1} = Q_n^{1+o(1)}$.
Soit $\ell_{i,n} \in \mathbb{Z}$ *pour* $0 \leq i \leq r$ *et* $n \geq 1$. *Supposons :*

$$d_n^{e_i} | \ell_{i,n} \quad \text{et} \quad |\ell_{i,n}| \leq Q_n \text{ pour tous } i, n,$$

avec $0 = e_0 \leq e_1 \leq \dots \leq e_r$, $d_n = \mathrm{ppcm}(1, 2, \dots, n)$,

$$d_n^{e_i} = Q_n^{\gamma_i + o(1)} \quad \text{et} \quad |\ell_{0,n}\xi_0 + \dots + \ell_{r,n}\xi_r| = Q_n^{-\tau + o(1)}.$$

Alors en posant $\varrho = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\xi_0, \dots, \xi_r)$ *on a*

$$\varrho \geq \tau + 1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{\varrho - 1}.$$

Nouvelle preuve du critère de Nesterenko

- Si $e_1 = \ldots = e_r = 0$ et $\tau + 1 > \dim \mathrm{Vect}(\xi_0, \ldots, \xi_r)$,
- alors dans $\mathbb{P}^r(\mathbb{R})$ le point $(\xi_0, \ldots, \xi_r)$ est :
  - Très proche d'un point $M \in \mathbb{Z}^{r+1}$ car $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\xi_0, \ldots, \xi_r)$ est majoré (Principe des Tiroirs).
  - Assez proche d'un hyperplan H_n d'équation $\ell_{0,n}X_0 + \ldots + \ell_{r,n}X_r = 0$.
- Donc l'hyperplan H_n est assez proche du point M.
- Donc H_n passe par M.
- Donc H_n est très proche de $(\xi_0, \ldots, \xi_r)$: trop proche.
- Avec des diviseurs : premier théorème de Minkowski.

Remarques et application

- Minoration conjecturalement optimale.
- Lien avec l'approximation simultanée de $\frac{\xi_1}{\xi_0}, \ldots, \frac{\xi_r}{\xi_0}$ par des nombres rationnels ayant le même dénominateur : avec Rivoal, Proc. AMS, 2010.

Théorème (avec Zudilin, Math. Annalen, 2010)

Il existe un entier impair $j \in \{5, 7, \ldots, 139\}$ tel que 1, $\zeta(3)$ et $\zeta(j)$ soient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

- Ball-Rivoal, 2001 : $139 \rightsquigarrow 169$.
- Zudilin, 2002 : $139 \rightsquigarrow 145$.
- Conjecture : $139 \rightsquigarrow 5$.

Programme de recherches

- En cours de rédaction : généralisation du critère de Nesterenko à des formes linéaires petites en plusieurs points.
- Très utile quand approximation de Padé de type II ou simultanée.

Théorème (avec Rivoal, J. Math. Pures et Appl., 2003)

Pour une infinité d'entiers $s \geq 2$ on a

$$\mathrm{Li}_s(1/2) + \frac{(\log(1/2))^s}{(s-1)!} \notin \mathbb{Q}.$$

- Polylogarithmes : $\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$.

Plan

La remarque de Khintchine avec ξ et ξ^2

- *Problème :* Supposons $1, \xi, \xi^2 \in \mathbb{R}$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Trouver les $\tau > 0$ tels que, *pour tout* H assez grand, il existe $(u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{\underline{0}\}$ avec

$$\max |u_i| \leq H \qquad \text{et} \qquad |u_0 + u_1\xi + u_2\xi^2| \leq H^{-\tau}.$$

Théorème (Jarník, 1938)

Ce sont exactement les τ inférieurs (ou égaux ?) à $\frac{\beta_1(\xi)}{\beta_1(\xi)-1}$.

- L'exposant $\beta_1(\xi)$ sera défini dans la diapositive suivante.
- On a $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq \beta_1(\xi) \leq 2$ d'où $2 \leq \frac{\beta_1(\xi)}{\beta_1(\xi)-1} \leq 2.618\ldots$
- Roy, 2003 : le principe des tiroirs est parfois battu !

Définition des exposants diophantiens

Soit $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non quadratique. Pour $\underline{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3$ on pose $L(\underline{x}) = \max(|x_0\xi - x_1|, |x_0\xi^2 - x_2|)$.

Définition

Pour $0 < \varepsilon \leq 1$ *on note* $\beta_\varepsilon(\xi)$ *la borne inférieure de l'ensemble des* $\beta > 0$ *tels que,* pour tout H *suffisamment grand, il existe* $\underline{x} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{\underline{0}\}$ *tel que*

$$|x_0| \leq H \qquad \textit{et} \qquad L(\underline{x}) \leq \min(H^{-1/\beta}, |x_0|^{\varepsilon-1}).$$

Définition

On pose $\beta_0(\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \beta_\varepsilon(\xi) \in]0, +\infty]$.

Résultats connus

- Principe des tiroirs : $\beta_1(\xi) \leq 2$ pour tout ξ.
- Davenport-Schmidt, 1969 : $\beta_0(\xi) \geq \beta_1(\xi) \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ pour tout ξ.
- Roy, 2003 : Construction explicite d'un ξ tel que $\beta_0(\xi) = \beta_1(\xi) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, à partir du mot de Fibonacci.
- Bugeaud-Laurent, 2005 : autres nombres ξ tels que $\beta_1(\xi) < 2$, construits à partir de mots sturmiens caractéristiques.

Résultat combinatoire

Soit $w = w_1 w_2 \dots$ un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$, non ultimement périodique.
Notons (n_i) la suite strictement croissante (supposée infinie) des entiers n pour lesquels $w_1 w_2 \dots w_n$ est un palindrome.

Définition

On appelle densité de préfixes palindromes *de w le nombre*

$$\delta(w) = \limsup n_{i+1}/n_i \in [1, +\infty]$$

et on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des valeurs prises par $\delta(w)$.

Théorème (J. Combin. Theory, Series A, 2006)

Les plus petits éléments de $\mathcal{S}$ forment une suite croissante de nombres quadratiques explicites, commençant par $(1+\sqrt{5})/2$ et qui converge vers le plus petit point d'accumulation de $\mathcal{S}$.

Résultat diophantien

Théorème (Monatshefte Math., 2007)

- *Tout mot w tel que $\delta(w) < 2$ fournit des ξ tels que $\beta_1(\xi) \leq \beta_0(\xi) < 2$.*
- *Tout nombre ξ tel que $\beta_0(\xi) < 2$ "provient" d'un mot w.*
- *Lorsque ξ et w se correspondent, on a $\beta_0(\xi) = \delta(w)$.*
- $\{\beta_0(\xi),\ \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *non quad.*$\} \cap]1,2[\ = \ \{\delta(w)\} \cap]1,2[$.

Programme de recherches

- Passer à $\beta_1(\xi)$ (cf. construction par Roy, à partir du mot de Fibonacci et d'un raffinement arithmétique, de nombres dont les $\beta_1(\xi)$ sont denses entre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et 2).
- Problème dual : $|u_0 + u_1\xi + u_2\xi^2| \leq H^{-\tau}$.

Plan

Distances, avec Patrice Philippon

- Lemme de petites valeurs.
- Distances entre sous-variétés de $\mathbb{P}^N$.
- cf. ε-p.g.c.d. et ε-factorisation.

Approximations de s.e.v., avec Michel Laurent

Pour $F \subset \mathbb{R}^n$ s.e.v. fixé, on cherche G :

- s.e.v. défini sur $\mathbb{Q}$,
- de dimension donnée,
- tel que les s premiers angles canoniques entre F et G soient très petits par rapport à $H(G)$.

W. Schmidt, Annals of Math., 1967.

Quelques problèmes d'approximation diophantienne

Habilitation à Diriger des Recherches

Stéphane Fischler

Université Paris-Sud, Orsay

8 Décembre 2010