Université Paris-Sud 11, Orsay

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : Mathématiques

Stéphane Fischler

Quelques problèmes d'approximation diophantienne

Soutenue le 8 décembre 2010 à Orsay, devant le jury composé de :

M. Jean-Benoît BOST	Professeur, Orsay
M. W. Dale BROWNAWELL	Professeur, Penn State University
M. Sinnou DAVID	Professeur, Paris VI
M. Gaël REMOND	Maître de Conférences Habilité, Grenoble
M. Emmanuel ULLMO	Professeur, Orsay
M. Michel WALDSCHMIDT	Professeur, Paris VI

A Inès et Oscar

Remerciements

Ce mémoire présente les travaux que j'ai effectués après ma thèse. La plupart ont été réalisés à l'université Paris-Sud (Orsay) ; je tiens à remercier en premier lieu tous ceux qui m'ont permis d'y travailler sereinement, chercheurs, enseignants-chercheurs, équipe informatique et personnels administratifs.

Michel Waldschmidt a encadré mon travail depuis mon D.E.A., et surtout pendant ma thèse. Il a su m'aiguiller sans trop m'aider, et je peux toujours compter sur ses conseils avisés ; c'est un plaisir pour moi de l'en remercier ici.

Damien Roy m'a encadré lui aussi, plus brièvement, pendant mon stage post-doctoral à l'université d'Ottawa. J'ai pris beaucoup de plaisir à discuter avec lui, et je suis sûr que cela continuera à l'avenir. Je le remercie d'avoir accepté, malgré de nombreuses autres contraintes, d'être rapporteur de ce mémoire.

Je remercie aussi Gaël Rémond d'avoir écrit un rapport, d'autant plus qu'il est nettement moins proche du sujet. J'espère que le travail qu'il a accompli lui donnera des idées pour ses recherches futures.

Jean-Benoît Bost a accepté d'écrire un rapport de présentation de ce mémoire, et je l'en remercie. Je suis très content qu'avec Emmanuel Ullmo il représente l'équipe d'Arithmétique et de Géométrie Algébrique d'Orsay dans mon jury.

La présence de Sinnou David dans ce jury est importante pour moi elle aussi : il a répondu présent quand j'avais besoin de ses conseils à plusieurs moments importants.

Enfin, je suis très honoré que Dale Brownawell ait accepté de faire partie de mon jury et s'intéresse ainsi à mes travaux.

Je ne peux pas conclure ces remerciements sans évoquer mes co-auteurs, et plus généralement tous ceux qui à un moment ou à un autre m'ont aidé à progresser dans mes travaux. J'ai aussi la chance d'être bien entouré par mes amis, ma famille, mes parents et surtout Chimène, Oscar et Inès qui me procurent au quotidien la sérénité dont j'ai besoin pour travailler. Brillante mathématicienne, épouse complice et maman extraordinaire, Chimène a toujours su m'aider y compris dans mes choix scientifiques ; cette habilitation lui doit beaucoup. Enfin, Oscar et Inès éclairent ma vie et sont une source continuelle d'inspiration.

Table des matières

Liste de publications

Les articles [1] à [11] sont présentés dans ce mémoire ; les suivants sont issus de ma thèse. Tous sont disponibles sur ma page web : `http://www.math.u-psud.fr/~fischler/`

[1] S. Fischler & M. Nakamaye – « Multiplicity estimates and degeneration », soumis.

[2] S. Fischler & W. Zudilin – « A refinement of Nesterenko's linear indepence criterion with applications to zeta values », *Math. Annalen* 347 (2010), p. 739–763.

[3] S. Fischler & T. Rivoal – « Irrationality exponent and rational approximations with prescribed growth », *Proc. Amer. Math. Soc.* 138.3 (2010), p. 799–808.

[4] S. Fischler – « Restricted rational approximation and Apéry-type constructions », *Indagationes Math.* 20.2 (2009), p. 201–215.

[5] S. Fischler – « Multiple series connected to Hoffman's conjecture on multiple zeta values », *J. of Algebra* **320** (2008), p. 1682–1703.

[6] J. Cresson, S. Fischler & T. Rivoal – « Phénomènes de symétrie dans des formes linéaires en polyzêtas », *J. Reine Angew. Math.* **617** (2008), p. 109–151.

[7] J. Cresson, S. Fischler & T. Rivoal – « Séries hypergéométriques multiples et polyzêtas », *Bull. Soc. Math. France* **136** (2008), no. 1, p. 97–145.

[8] J. Cresson, S. Fischler & T. Rivoal – Algorithme tiré de [7], disponible sur `http://www.math.u-psud.fr/~fischler/algo.html`.

[9] S. Fischler – « Palindromic prefixes and diophantine approximation », *Monatshefte Math.* **151** (2007), p. 11–37.

[10] S. Fischler – « Palindromic prefixes and episturmian words », *J. Combin. Theory, Series A* **113** (2006), p. 1281–1304.

[11] S. Fischler & T. Rivoal – « Un exposant de densité en approximation rationnelle », *International Math. Research Notices* (2006), no. 24, Article ID 95418, 48 pages.

[12] S. Fischler – « Interpolation on algebraic groups », *Compositio Math.* **141** (2005), p. 907–925.

[13] S. Fischler – « Spectres pour l'approximation d'un nombre réel et de son carré », *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **339** (2004), no. 10, p. 679–682.

[14] S. Fischler – « Irrationalité de valeurs de zêta (d'après Apéry, Rivoal, ...) », in *Sém. Bourbaki 2002/03*, Astérisque, no. 294, 2004, exp. no. 910, p. 27–62.

[15] S. Fischler & T. Rivoal – « Approximants de Padé et séries hypergéométriques équilibrées », *J. Math. Pures Appl.* **82** (2003), no. 10, p. 1369–1394.

[16] S. Fischler – « Groupes de Rhin-Viola et intégrales multiples », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **15** (2003), no. 2, p. 479–534.

[17] S. Fischler – « Formes linéaires en polyzêtas et intégrales multiples », *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **335** (2002), no. 1, p. 1–4.

[18] S. Fischler – « Mesures d'irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ », in *Actes du Colloque Jeunes Chercheurs en Théorie des Nombres de Besançon (18-20 mars 2002)*, Publications Mathématiques de l'Université de Franche-Comté, 6 pages.

[19] S. Fischler – « Orbits under algebraic groups and logarithms of algebraic numbers », *Acta Arithmetica* **100** (2001), no. 2, p. 167–187.

[20] S. Fischler – « Lemmes de zéros et algèbres de Hopf », in *Contributions à l'étude diophantienne des polylogarithmes et des groupes algébriques*, Juin 2003, Thèse de doctorat, Université Paris VI, disponible sur `http://theses-EN-ligne.in2p3.fr`, p. 175–183.

Introduction

Ce mémoire d'habilitation à diriger des recherches présente mes travaux effectués depuis l'été 2003, c'est-à-dire après ma thèse. Certains ont été réalisés en collaboration (voir la liste de publications), même si cela n'est pas mentionné explicitement dans le texte. Ce rapport comporte cinq parties :

1. Approximation simultanée et préfixes palindromes
2. Formes linéaires en polyzêtas
3. Approximation rationnelle d'un nombre
4. Le critère d'indépendance linéaire de Nesterenko
5. Un lemme de zéros lié à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

L'approximation simultanée considérée dans la première partie est celle d'un nombre réel ξ et de son carré par des nombres rationnels de même dénominateur ; on suppose ξ irrationnel et non quadratique. La qualité de ces approximations est mesurée classiquement par un exposant $\beta_1(\xi)$ (défini au paragraphe 1.3) ; Davenport et Schmidt ont démontré [DS69] en 1969 que pour tout ξ on a $\beta_1(\xi) \geq \gamma$, où $\gamma = (1+\sqrt{5})/2$ est le nombre d'or. Il semblait naturel d'imaginer que $\beta_1(\xi)$ est en fait toujours minoré par 2 ; au contraire, Roy a construit en 2003 ([Roy03a], [Roy04] ; voir aussi [Roy03b]) un réel ξ tel que $\beta_1(\xi) = \gamma$. Il utilise pour cela un développement en fraction continue obtenu à partir d'un mot infini ayant beaucoup de préfixes palindromes, en l'occurrence le mot de Fibonacci. Bugeaud et Laurent ont ensuite appliqué sa méthode [BL05] à un mot sturmien caractéristique quelconque, ce qui donne d'autres exemples de nombres ξ tels que $\beta_1(\xi) < 2$. Je me suis intéressé au problème de savoir dans quelle mesure les propriétés diophantiennes d'un nombre ξ tel que $\beta_1(\xi) < 2$ proviennent de la combinatoire des mots. Pour cela, j'ai d'abord étudié de manière générale [10] les mots infinis ayant une infinité de préfixes palindromes, en mettant l'accent sur la densité $\delta(w)$ des préfixes palindromes d'un tel mot w. J'ai ensuite défini [13] un nouvel exposant $\beta_0(\xi)$, vérifiant $\beta_0(\xi) \geq \beta_1(\xi)$, et caractérisé [9] toutes les valeurs comprises entre γ et 2 que peut prendre $\beta_0(\xi)$. Si ξ est obtenu en suivant la méthode de Roy à partir d'un mot w, alors $\beta_0(\xi) = \delta(w) < 2$; en outre toutes les valeurs de $\beta_0(\xi)$ sont obtenues ainsi car pour tout ξ tel que $\beta_0(\xi) < 2$ il existe w tel que $\beta_0(\xi) = \delta(w)$. Les preuves reposent sur la méthode des éléments minimaux successifs de Davenport et Schmidt et sur les travaux de Roy.

Les parties 2, 3 et 4 de ce mémoire ont une motivation commune : les résultats d'irrationalité de valeurs de la fonction ζ de Riemann en des entiers impairs, notamment l'irrationalité de $\zeta(3)$ (Apéry [Apé79], en 1978) et de $\zeta(2k+1)$ pour une infinité de k (Rivoal [Riv00] et Ball-Rivoal [BR01], en 2000). Avec l'objectif d'obtenir de nouveaux résultats diophantiens sur les valeurs de ζ (ou plus généralement sur les polyzêtas), il est naturel d'essayer de mieux comprendre et/ou de généraliser les outils mis en œuvre dans les preuves de résultats connus. Dans ma thèse, après une synthèse [14] ayant donné lieu à un exposé au Séminaire Bourbaki, j'avais interprété (en commun avec Rivoal [15]) la construction de Rivoal et Ball-Rivoal en termes d'approximation de Padé, étudié ([16],

[17], [18]) certaines actions de groupes sur des familles d'intégrales multiples (à la suite des travaux de Rhin-Viola) et exhibé ([16], [17]) des changements de variables reliant des intégrales multiples (notamment celles de Vasilyev et Sorokin).

Le chapitre 2 est consacré à une autre approche pour construire des formes linéaires en polyzêtas : celle des séries multiples de type hypergéométrique. On démontre (en commun avec Cresson et Rivoal [7]) qu'une telle série se décompose en forme linéaire en polyzêtas, et la preuve a été implémentée [8] sous forme d'un programme en GP/Pari. Cela a permis de faire des expérimentations, et de découvrir deux phénomènes de symétrie (voir [5] et, en commun avec Cresson et Rivoal, [6]) qui généralisent celui ayant permis à Rivoal et Ball-Rivoal d'obtenir des formes linéaires dans lesquelles $\zeta(s)$ n'apparaît que pour s impair. Dans le même esprit, il s'agit de prouver que des propriétés de symétrie du sommande permettent de restreindre l'ensemble de polyzêtas susceptibles d'intervenir dans la combinaison linéaire obtenue. Une fois ces propriétés démontrées, l'étape suivante serait d'en déduire de nouveaux résultats diophantiens, mais (pour l'instant) nous n'y sommes pas parvenus. En revanche, dans le cas des séries simples, on obtient (en commun avec Zudilin [2]) une nouvelle construction hypergéométrique de formes linéaires en 1, $\log 2$, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\ldots$, $\zeta(a)$ qui permet (pour $a = 93$) de prouver qu'au moins trois de ces nombres sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

L'objectif du chapitre 3 est de comprendre quelles propriétés diophantiennes de $\zeta(3)$ peuvent être déduites de la construction par Apéry d'une suite de formes linéaires $u_n\zeta(3) - v_n$ à coefficients entiers u_n et v_n. Comme (u_n) tend vers $+\infty$ et $(u_n\zeta(3)-v_n)$ vers 0 de façon essentiellement géométrique, un lemme classique permet d'en déduire une majoration de l'exposant d'irrationalité $\mu(\zeta(3))$ (qui est la borne supérieure de l'ensemble des μ tels qu'il existe une infinité de fractions p/q vérifiant $|\zeta(3)-p/q| \leq q^{-\mu}$). Dans un travail en commun avec Rivoal [3], on démontre que cette déduction est en fait une équivalence, c'est-à-dire que toute majoration de $\mu(\xi)$ (avec $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) implique l'existence de formes linéaires $u_n\xi - v_n$ ayant de tels comportements asymptotiques. Pour obtenir une nouvelle propriété diophantienne de $\zeta(3)$, on fait donc intervenir un aspect de la construction d'Apéry qui n'avait pas été utilisé à ma connaissance : le fait que d_n^3 divise u_n, où d_n est le p.p.c.m. des entiers $1, 2, \ldots, n$. On définit un exposant d'approximation rationnelle restreinte (c'est-à-dire qui mesure la qualité des approximations de $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ par des fractions p/q avec une condition de divisibilité sur q), et on montre que l'existence de formes linéaires comme celles d'Apéry (telles que d_n^3 divise u_n) équivaut à une majoration de cet exposant pour $\zeta(3)$. On obtient ainsi une partie de $\mathbb{R}$ définie par des conditions diophantiennes qui ne contient pas $\zeta(3)$ et dont la dimension de Hausdorff est $0.5745\ldots$. Cette valeur est la plus grande connue, et elle semble meilleure que ce qu'on peut déduire des variantes de la construction d'Apéry (dues à Hata, Rhin-Viola, ...) utilisées pour majorer plus finement $\mu(\zeta(3))$.

Le chapitre 4 étend partiellement les résultats du chapitre 3 au cas de plusieurs variables : on considère une suite de formes linéaires $\ell_{0,n}\xi_0 + \ldots \ell_{r,n}\xi_r$ qui tend vers 0 "géométriquement", avec une croissance au plus géométrique des coefficients $\ell_{i,n}$. Le critère d'indépendance linéaire de Nesterenko [Nes85] permet d'en déduire une minoration de la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $\xi_0, \ldots, \xi_r$: il s'agit d'une étape cruciale dans la preuve par Rivoal et Ball-Rivoal que 1, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, ... engendrent un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie. En fait, l'existence de telles formes linéaires interdit à $(\xi_1/\xi_0, \ldots, \xi_r/\xi_0)$ d'avoir de trop bonnes approximations simultanées $(q_1/q_0, \ldots, q_r/q_0)$ par des nombres rationnels de même dénominateur q_0. Le principe des tiroirs permet d'en déduire la minoration de $\dim \mathrm{Vect}(\xi_0, \ldots, \xi_r)$ obtenue par Nesterenko. Cela fournit une nouvelle preuve de son critère, rédigée en termes d'exposants d'approximation diophantienne (en commun avec Rivoal [3]), qui généralise le lemme classique utilisé pour majorer $\mu(\zeta(3))$. Cependant, la réciproque à ce lemme démontrée quand $r = 1$ au chapitre 3 est un problème ouvert pour $r \geq 2$. Dans le même esprit que dans la deuxième partie du chapitre 3, on peut aussi étudier le cas où les coefficients $\ell_{i,n}$ des formes linéaires ont des diviseurs communs $\delta_{i,n}$ vérifiant certaines hypothèses (notamment $\delta_{i,n}$ divise $\delta_{i,n+1}$). En commun avec Zudilin [2], on peut alors raffiner la minoration de $\dim \mathrm{Vect}(\xi_0, \ldots, \xi_r)$ obtenue par le critère de Nesterenko. La preuve utilise les mêmes idées que ci-dessus, le principe des tiroirs étant remplacé par le premier théorème de Minkowski sur les corps convexes. En reprenant les constructions existantes de formes linéaires, on démontre ainsi qu'au moins trois nombres parmi 1, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\ldots$, $\zeta(139)$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants (ce qui était déjà prouvé, par Zudilin, avec 139 remplacé par 145). On obtient aussi des raffinements du même type pour le q-analogue de la fonction ζ.

Dans les chapitres 1 à 4, les approximations considérées sont toujours construites de façon plus ou moins explicite (à l'exception du principe des tiroirs utilisé dans la preuve du critère de Nesterenko). Cependant, de nombreux résultats en approximation diophantienne sont démontrés avec des fonctions auxiliaires, obtenues en général par un lemme de Siegel. Un lemme de zéros est alors indispensable pour conclure la preuve : il s'agit de démontrer qu'un certain nombre est non nul (par exemple la valeur d'une fonction auxiliaire en un point où elle est petite). Ce type d'énoncé est nécessaire même quand on parvient à éliminer toute utilisation d'un lemme de Siegel (avec la méthode des pentes ou celle des déterminants d'interpolation). On peut le remplacer par un lemme d'interpolation, qui en est une version "duale". Dans le cas des groupes algébriques commutatifs (notamment les produits du groupe additif $\mathbb{G}_a$, du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$, de variétés abéliennes, ...), de tels lemmes de zéros sont connus (notamment celui de Philippon [Phi86b]) ; ils sont optimaux à une constante multiplicative près. En ce qui concerne les lemmes d'interpolation, j'ai démontré dans ma thèse [12] qu'on peut inclure des multiplicités dans celui de Masser [Mas83]. Cependant pour un groupe algébrique non commutatif, la généralisation [Nak95] de ces lemmes de zéros est tellement loin d'être optimale qu'en pratique elle semble impossible à appliquer. J'ai introduit dans ma thèse [20] un formalisme, en termes d'algèbres de Hopf, permettant d'énoncer des lemmes de zéros ou d'interpolation dans un groupe algébrique linéaire quelconque, en préservant la dualité de Fourier-Borel [Wal91].

En commun avec Nakamaye [1], on démontre au chapitre 5 un premier lemme de zéros (optimal à constante près) lié à une action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Précisément, l'action naturelle de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{C}^2$ fournit, en prenant l'exponentielle de chaque coordonnée, une action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{G}_m^2$. Pour $N \geq 1$, notons $\Gamma[N]$ l'ensemble des matrices de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ dont les coefficients sont compris entre 0 et N. Pour $(x, y) \in \mathbb{G}_m^2$ et $d, M \geq 1$, soit $C \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ une courbe de bi-degré (d, d) passant par chaque point de $\Gamma[N] \cdot (x, y)$ avec multiplicité au moins M. Si $\mathrm{Card}\,(\Gamma[N] \cdot (x, y)) = \mathrm{Card}\,\Gamma[N]$ et si (x, y) n'appartient pas à un certain ensemble fini (qui dépend seulement de N), alors on a $d \geq (\frac{1}{6} + o(1))M \operatorname{Card} \Gamma[N]$ où $o(1)$ est une fonction de N seulement, qui tend vers 0 quand $N \to \infty$. En outre cette minoration est optimale, à la valeur près de la constante 6. La preuve de ce résultat utilise une méthode de dégénérescence, fondée sur le fait qu'on peut facilement minorer la constante de Seshadri de $\Gamma[N] \cdot (x, y)$ lorsque $x = 1$ ou $y = 1$, puisque dans ce cas cet ensemble est presque un réseau. La motivation pour démontrer ce lemme de zéros provient de la construction par Roy d'une fonction auxiliaire non triviale pouvant servir à étudier les points à coordonnées logarithmes de nombres algébriques sur les grassmanniennes. J'avais étudié ce sujet dans ma thèse [19], mais sans mettre en œuvre les techniques de transcendance directement sur la grassmannienne ; pour y parvenir, il manque seulement un lemme de zéros, qui est analogue à celui démontré ci-dessus.

1 Approximation simultanée et préfixes palindromes

Cette partie est consacrée à l'étude de deux problèmes intimement liés, l'un diophantien (l'approximation simultanée d'un nombre réel et de son carré par des nombres rationnels ayant le même dénominateur), et l'autre issu de la combinatoire des mots (l'étude des mots infinis dont une infinité de préfixes sont des palindromes). Les résultats, annoncés en partie dans [13], ont été publiés dans deux articles.

Le premier [10] concerne exclusivement le problème combinatoire. Il est rédigé et motivé de ce point de vue : il consiste à étudier les mots *à préfixes palindromes abondants*, c'est-à-dire (par définition) tels que la suite $(n_i)_{i \geq 1}$ des longueurs des préfixes palindromes (définie au paragraphe 1.2) vérifie $n_{i+1} \leq 2n_i + 1$ pour tout $i \geq 1$. On montre notamment comment construire ces mots, et on les relie à d'autres classes de mots étudiées en combinatoire (comme les mots sturmiens et épisturmiens [DJP01]).

Le second article [9] est consacré au problème diophantien, et à ses liens avec le problème combinatoire. Il utilise les résultats du premier, ainsi que certaines idées de preuves.

Dans ce mémoire, la priorité est donnée aux résultats diophantiens. L'ensemble des mots à préfixes palindromes abondants n'est donc pas étudié pour lui-même ; on utilise une variante, notée $\mathcal{W}$, plus facile à relier à la situation diophantienne. Les résultats de combinatoire des mots sont donc cités dans une version adaptée, souvent affaiblie mais plus naturelle au vu de leur utilisation : c'est l'objet du paragraphe 1.2. Auparavant, on étudie au paragraphe 1.1 une famille de relations de récurrence qui est cruciale pour les deux problèmes ; encore une fois, les définitions choisies sont les plus appropriées du point de vue diophantien, donc elles diffèrent un peu de celles de [10]. Enfin le paragraphe 1.3 résume les résultats diophantiens, et les liens entre les deux problèmes.

1.1 Etude d'une famille de récurrences

Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions $\psi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. Pour tout $n \geq 1$, $\psi(n) \leq n - 1$.
2. Pour une infinité de n, $\psi(n) \leq n - 2$.

3. Il existe $c > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$, $\psi(n) \geq n - c$.
4. En notant $(\vartheta_k)_{k\geq 0}$ la suite croissante infinie des entiers n tels que $\psi(n) \leq n-2$, on a $\psi(\vartheta_k) < \vartheta_{k-1}$ et $\psi(\vartheta_k) \neq \psi(\vartheta_{k-1})$ pour tout k assez grand.

La motivation pour considérer cet ensemble $\mathcal{F}$ provient de l'utilisation qui en sera faite (§§1.2 et 1.3).

Pour $\psi \in \mathcal{F}$, il existe des suites strictement croissantes $(m_i)_{i\geq 1}$, formées à partir d'un certain rang d'entiers strictement positifs, telles que $m_{i+1} = 2m_i - m_{\psi(i)}$ pour tout i assez grand. On peut démontrer (Proposition 6.2 de [10]) que la quantité $\limsup \frac{m_{i+1}}{m_i}$ ne dépend pas de la suite (m_i) choisie ; on la note $\delta(\psi)$. Elle vérifie toujours $\delta(\psi) < 2$.

Du point de vue combinatoire expliqué ci-dessous, les fonctions $\psi \in \mathcal{F}$ les plus "simples" sont celles telles que $\psi(\vartheta_k) = \vartheta_{k-1} - 1$ pour tout k assez grand ; on les appellera *asymptotiquement sturmiennes*. On peut démontrer (Lemme 7.1 de [10]) que si $\psi \in \mathcal{F}$ vérifie $\delta(\psi) < \sqrt{3}$ alors ψ est asymptotiquement sturmienne. Or Cassaigne a étudié [Cas99] les valeurs inférieures à $1.721\ldots$ prises par $\delta(\psi)$ lorsque ψ est asymptotiquement sturmienne. Comme $1.721\ldots < \sqrt{3}$, son résultat donne, en notant $\mathcal{S}$ l'ensemble des $\delta(\psi)$ pour $\psi \in \mathcal{F}$:

Proposition 1.1. *Les plus petits éléments de $\mathcal{S}$ forment une suite strictement croissante $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ de nombres quadratiques, avec $\sigma_1 = (1+\sqrt{5})/2$, $\sigma_2 = 1+\sqrt{2}/2$, $\sigma_3 = (2+\sqrt{10})/3$, $\ldots$, qui converge vers le plus petit point d'accumulation $\sigma_\infty = 1.721\ldots$ de $\mathcal{S}$.*

Cassaigne donne en outre le développement en fraction continue de chacun des σ_n, et de σ_∞.

On déduit notamment de cette proposition que, pour tout $\psi \in \mathcal{F}$, $\delta(\psi)$ est minoré par le nombre d'or.

Notons enfin $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$ définie par $\psi\mathcal{R}\psi'$ si, et seulement si, il existe ℓ tel que $\psi(n) - n = \psi(n-\ell) - (n-\ell)$ pour tout n assez grand. Cette relation (qui traduit l'égalité à un décalage près et à un nombre fini de valeurs près) est compatible avec l'application δ au sens où $\psi\mathcal{R}\psi'$ implique $\delta(\psi) = \delta(\psi')$.

1.2 Préfixes palindromes

Soit $w = w_1 w_2 \ldots$ un mot infini sur un alphabet fini $\mathcal{A}$ (dans toute cette partie, $\mathcal{A}$ est fixé et on suppose qu'il contient au moins deux lettres). Pour tout $n \geq 1$, le préfixe de w de longueur n est le mot fini $w_1 w_2 \ldots w_n$; c'est un palindrome si $w_1 = w_n$, $w_2 = w_{n-1}$, etc. Notons $(n_i)_{i\geq 1}$ la suite strictement croissante (supposée infinie) des entiers n pour lesquels c'est le cas. Notons $\pi_i = w_1 w_2 \ldots w_{n_i}$ le préfixe palindrome de longueur n_i. Pour $i' \leq i$, il existe un mot $b = w_{n_{i'}+1} \ldots w_{n_i}$ tel que $\pi_i = \pi_{i'} b$; on note $\pi_{i'}^{-1}\pi_i$ ce mot b.

Notons $\mathcal{W}$ l'ensemble des mots infinis sur l'alphabet $\mathcal{A}$, non ultimement périodiques, tels que la suite infinie (n_i) vérifie $\limsup n_{i+1}/n_i < 2$. Il s'agit d'une condition plus stricte que celle qui définit dans [10] les mots à préfixes palindromes abondants (à savoir $n_{i+1} \leq 2n_i + 1$

pour tout $i \geq 1$). Cependant l'ensemble $\mathcal{W}$ est celui qui est le plus naturellement relié au problème diophantien étudié au paragraphe suivant.

On a le résultat suivant [10] :

Théorème 1.2. *Soit $w \in \mathcal{W}$. Il existe $\psi \in \mathcal{F}$ telle que $\pi_{i+1} = \pi_i \pi_{\psi(i)}^{-1} \pi_i$ pour tout i assez grand, et ψ est unique modulo $\mathcal{R}$. En outre toute fonction $\psi \in \mathcal{F}$ provient ainsi d'un mot w.*

Si ψ est associée à w alors on a $n_{i+1} = 2n_i - n_{\psi(i)}$ pour tout i assez grand, donc $\limsup n_{i+1}/n_i = \delta(\psi)$. L'ensemble des valeurs prises par $\limsup n_{i+1}/n_i$ quand w décrit $\mathcal{W}$ est donc exactement l'ensemble $\mathcal{S}$ décrit par la proposition 1.1, et défini juste avant celle-ci. Il en découle notamment que $\limsup n_{i+1}/n_i \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ pour tout $w \in \mathcal{W}$. Cette minoration est optimale, car le mot de Fibonacci $w = abaaba\ldots$ défini sur un alphabet à deux lettres $\{a, b\}$ vérifie $\limsup n_{i+1}/n_i = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; en effet il correspond dans le théorème 1.2 aux fonctions ψ telles que $\psi(n) = n - 2$ pour tout n assez grand. On peut construire ce mot en posant $\pi_1 = a$, $\pi_2 = aba$ et $\pi_{i+1} = \pi_i \pi_{i-2}^{-1} \pi_i$ pour tout $i \geq 2$ (où π_0 désigne le mot vide).

En combinatoire, une famille classique de mots $w \in \mathcal{W}$ est formée par les mots sturmiens caractéristiques dont l'angle est à quotients partiels bornés ; le mot de Fibonacci en est l'exemple le plus simple. Pour un tel mot, les fonctions ψ associées via le théorème 1.2 sont asymptotiquement sturmiennes (au sens du §1.1). Soit $w \in \mathcal{W}$ tel que $\limsup n_{i+1}/n_i < \sqrt{3}$. Alors la fonction ψ associée est asymptotiquement sturmienne (d'après le résultat mentionné avant la proposition 1.1), et on peut montrer qu'il existe un mot sturmien caractéristique w' dont l'angle est à quotients partiels bornés et dont la suite (n'_i) des longueurs des préfixes palindromes vérifie $\limsup n'_{i+1}/n'_i = \limsup n_{i+1}/n_i$; en outre w et w' sont associés aux mêmes fonctions ψ, ce qui signifie que leurs préfixes palindromes vérifient la même relation de récurrence.

1.3 Approximation simultanée

Soit ξ un nombre réel irrationnel et non quadratique. Pour $\underline{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3$ on pose $L(\underline{x}) = \max(|x_0\xi - x_1|, |x_0\xi^2 - x_2|)$. Ainsi un élément $\underline{x}$ pour lequel $L(\underline{x})$ est petit correspond-il à de bonnes approximations simultanées x_1/x_0 et x_2/x_0 de ξ et ξ^2 respectivement, avec le même dénominateur x_0.

Pour $\varepsilon \in]0, 1]$ on note $\beta_\varepsilon(\xi)$ la borne inférieure de l'ensemble des $\beta > 0$ tels que, pour tout A suffisamment grand, il existe $\underline{x} \in \mathbb{Z}^3$ tel que

$$1 \leq |x_0| \leq A \qquad \text{et} \qquad L(\underline{x}) \leq \min(A^{-1/\beta}, |x_0|^{\varepsilon - 1}).$$

Si cet ensemble de β est vide, on pose $\beta_\varepsilon(\xi) = +\infty$. Visiblement, la fonction $\varepsilon \mapsto \beta_\varepsilon(\xi)$ est décroissante, et on pose :

$$\beta_0(\xi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \beta_\varepsilon(\xi) = \sup_{\varepsilon \in]0,1]} \beta_\varepsilon(\xi).$$

Parmi ces exposants, le plus étudié est $\beta_1(\xi)$ car pour $\varepsilon = 1$ on a $\min(A^{-1/\beta}, |x_0|^{\varepsilon-1}) = A^{-1/\beta}$ dans la définition de $\beta_\varepsilon(\xi)$.

Le principe des tiroirs montre qu'on a toujours $\beta_1(\xi) \le 2$; en outre pour presque tout nombre ξ (au sens de la mesure de Lebesgue) on a $\beta_1(\xi) = 2$. Par ailleurs on constate que pour $\varepsilon > 0$, $\beta_\varepsilon(\xi)$ est la borne inférieure de l'ensemble des β pour lesquels il existe une suite $(\underline{x}_i)_{i\ge1}$ telle que $L(\underline{x}_i) \le |x_{i,0}|^{\varepsilon-1}$ et $|x_{i,0}| < |x_{i+1,0}| \le L(\underline{x}_i)^{-\beta}$ pour tout $i \ge 1$. Il en découle que $\beta_\varepsilon(\xi) = \beta_1(\xi)$ pour tout $\varepsilon > 1 - 1/\beta_1(\xi)$. En outre, on peut démontrer (voir [BL05]) que presque sûrement au sens de la mesure de Lebesgue on a $\beta_\varepsilon(\xi) = +\infty$ pour $\varepsilon < 1/2$ et $\beta_\varepsilon(\xi) = 2$ pour $\varepsilon > 1/2$.

Davenport et Schmidt ont démontré [DS69] que $\beta_1(\xi)$ est, pour tout ξ non quadratique, minoré par le nombre d'or $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots$. Une conjecture largement répandue (parallèle à celle de [Sch80], p. 259) prévoyait $\beta_1(\xi) = 2$ pour tout ξ. Mais Roy a construit ([Roy03a], [Roy04] ; voir aussi [Roy03b]) un réel ξ tel que $\beta_1(\xi) = \gamma$, montrant que la minoration de Davenport et Schmidt est en fait optimale.

La méthode introduite par Roy peut se résumer ainsi. Soit $w = w_1w_2\ldots$ un mot infini dont les lettres w_n appartiennent à un alphabet fini. Étant donné une application injective φ de cet alphabet dans $\mathbb{N}^*$, on peut associer à w le nombre réel $\xi_{w,\varphi}$ dont le développement en fraction continue est $[0, \varphi(w_1), \varphi(w_2), \varphi(w_3), \ldots]$. Le nombre $\xi_{w,\varphi}$ n'est pas quadratique, sauf si w est ultimement périodique. Il est connu (voir par exemple [Sch80], chapitre I) que la n-ème réduite de $\xi_{w,\varphi}$ s'écrit p_n/q_n, avec $|q_n\xi - p_n| \le q_n^{-1}$ et :

$$\begin{bmatrix} q_n & q_{n-1} \\ p_n & p_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(w_1) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(w_2) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \varphi(w_n) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Supposons que, pour une infinité d'entiers n, le mot formé par les n premières lettres de w est un palindrome ; notons (n_i) la suite strictement croissante formée par ces entiers n. Alors la matrice de (1.1) est symétrique pour $n = n_i$, d'où $q_{n-1} = p_n$. Il en découle que p_{n-1}/q_n est une bonne approximation rationnelle de $\xi_{w,\varphi}^2$; précisément on a pour $n = n_i$:

$$L((q_n, p_n, p_{n-1})) = \max(|q_n\xi - p_n|, |q_n\xi^2 - p_{n-1}|) \le c\, q_n^{-1}$$

avec une certaine constante c qui dépend seulement de $\xi_{w,\varphi}$. On en déduit la majoration

$$\beta_1(\xi_{w,\varphi}) \le \beta_0(\xi_{w,\varphi}) \le \limsup_{i\to\infty} \frac{\log(q_{n_{i+1}})}{\log(q_{n_i})} \tag{1.2}$$

qui est intéressante si le membre de droite est strictement inférieur à 2 (ce qui nécessite que le mot w admette suffisamment de préfixes palindromes).

Roy a appliqué cette méthode au mot de Fibonacci, pour lequel (1.2) donne $\beta_1(\xi_{w,\varphi}) = \beta_0(\xi_{w,\varphi}) = \gamma$. Puis Bugeaud et Laurent l'ont appliquée [BL05], pour toute suite $\underline{s} = (s_k)_{k\ge1}$ d'entiers strictement positifs, au mot sturmien caractéristique d'angle $[0, s_1, s_2, \ldots]$ (voir aussi [ADQZ01]) ; lorsque la famille (s_i) est bornée, ils obtiennent ainsi de nouveaux nombres réels ξ pour lesquels $\beta_0(\xi) < 2$. On peut démontrer plus généralement (voir [9], §7) que pour tout $w \in \mathcal{W}$ et pour toute injection φ le nombre $\xi_{w,\varphi}$ ainsi construit vérifie :

$$\beta_1(\xi_{w,\varphi}) \le \beta_0(\xi_{w,\varphi}) = \limsup_{i\to\infty} \frac{\log(q_{n_{i+1}})}{\log(q_{n_i})} = \limsup \frac{n_{i+1}}{n_i} < 2,$$

ce qui rend beaucoup plus systématique la méthode de Roy et permet de calculer exactement la valeur de $\beta_0(\xi_{w,\varphi})$. Il serait intéressant de savoir si ces nombres vérifient $\beta_1(\xi_{w,\varphi}) = \beta_0(\xi_{w,\varphi})$.

Outre le fait de produire des nombres ξ particuliers tels que $\beta_0(\xi) < 2$, il est possible aussi d'étudier ces nombres en général. Soit ξ un nombre réel irrationnel et non quadratique, tel que $\beta_0(\xi) < 2$. Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit (en fonction de $\beta_0(\xi)$). Notons $\mathcal{B}_\varepsilon$ l'ensemble des points $\underline{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $x_0 \geq 1$, $\mathrm{pgcd}(x_0, x_1, x_2) = 1$ et $L(\underline{x}) \leq X^{-(1-\varepsilon)}$ où $X = \max(|x_0|, |x_1|, |x_2|)$. Notons $(\underline{u}_i)$ la suite formée par les éléments de $\mathcal{B}_\varepsilon$, ordonnés de telle sorte que la suite (U_i) définie par $U_i = \max(|u_{i,0}|, |u_{i,1}|, |u_{i,2}|)$ soit croissante. On a le résultat suivant [9] :

Théorème 1.3. *Il existe une fonction $\psi \in \mathcal{F}$ telle que $\underline{u}_{i+1}$ soit colinéaire à $[\underline{u}_i, \underline{u}_i, \underline{u}_{\psi(i)}]$ pour tout i assez grand, et on a*

$$L(\underline{u}_i) = U_i^{-1+o(1)}, \qquad \liminf_{i\to\infty} \frac{\log U_{i+1}}{\log U_i} > 1 \quad \textit{et} \quad \beta_0(\xi) = \beta_\varepsilon(\xi) = \limsup_{i\to\infty} \frac{\log U_{i+1}}{\log U_i} = \delta(\psi).$$

En outre, ψ est unique modulo $\mathcal{R}$ et ni la suite $(\underline{u}_i)$ (modulo un nombre fini de termes) ni ψ (modulo $\mathcal{R}$) ne dépendent du choix de ε. Enfin, toute fonction $\psi \in \mathcal{F}$ provient, de cette manière, d'un nombre réel ξ tel que $\beta_0(\xi) < 2$.

Dans cet énoncé, le crochet $[\underline{u}_i, \underline{u}_i, \underline{u}_{\psi(i)}]$ est celui introduit par Roy [Roy04]. La preuve de ce théorème utilise aussi, notamment, la suite des points minimaux successifs de Davenport et Schmidt ([DS67], [DS69]).

Le théorème 1.3 est un analogue diophantien du théorème 1.2. On déduit de ces deux résultats l'existence d'applications surjectives $f_1 : \mathcal{W} \to \mathcal{F}/\mathcal{R}$ et $f_2 : \Xi \to \mathcal{F}/\mathcal{R}$, où Ξ est l'ensemble des $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non quadratiques tels que $\beta_0(\xi) < 2$, vérifiant $\delta(f_1(w)) = \limsup n_{i+1}/n_i$ (où (n_i) est la suite des longueurs des préfixes palindromes de w) et $\delta(f_2(\xi)) = \beta_0(\xi)$. Il en découle l'égalité entre les ensembles de valeurs $\{\limsup n_{i+1}/n_i,\ w \in \mathcal{W}\}$, $\{\delta(\psi),\ \psi \in \mathcal{F}\}$ et $\{\beta_0(\xi),\ \xi \in \Xi\}$; la proposition 1.1 décrit les plus petits éléments de cet ensemble. On en déduit aussi que pour tout $\xi \in \Xi$ il existe $w \in \mathcal{W}$ tel que $f_2(\xi) = f_1(w)$; cela fournit une sorte de réciproque à la construction de $\xi_{w,\varphi}$ à partir de w (puisque $f_2(\xi_{w,\varphi}) = f_1(w)$). Ce résultat signifie que pour tout $\xi \in \Xi$ il existe $w \in \mathcal{W}$ tel que les très bonnes approximations simultanées de ξ et ξ^2 (i.e. les points de $\mathcal{B}_\varepsilon$ avec ε petit) satisfassent à la “même” relation de récurrence que les préfixes palindromes de w.

2 Formes linéaires en polyzêtas

Le point de départ de cette partie est l'approche par les séries de type hypergéométrique pour démontrer des résultats diophantiens sur les valeurs de la fonction ζ de Riemann. C'est l'une des approches possibles pour démontrer (à la suite d'Apéry [Apé79]) l'irrationalité de $\zeta(3)$: elle a été développée par Beukers, Gutnik et Nesterenko (voir [14], §1.4). C'est aussi la seule connue pour démontrer (à la suite de Rivoal [Riv00] et Ball-Rivoal [BR01]) que $\zeta(s)$ est irrationnel pour une infinité de s impairs (et cette approche permet aussi de retrouver les formes linéaires d'Apéry, voir [14], §1.9). Dans les deux cas, il s'agit de considérer des séries de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{(k)_{n+1}^{A}} \tag{2.1}$$

avec $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$, $n \geq 0$ et $A \geq 1$ tels que $\deg P \leq A(n+1) - 2$; rappelons que le symbole de Pochhammer $(\alpha)_m$ vaut par définition $\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+m-1)$. Cette série s'écrit comme combinaison linéaire de 1, $\zeta(2)$, $\zeta(3)$, ..., $\zeta(A)$, à coefficients rationnels. L'un des ingrédients principaux de [Riv00] et [BR01] est la remarque suivante :

Si $P(-n-X) = (-1)^{A(n+1)+1}P(X)$ alors seuls 1 et les $\zeta(s)$, s impair, apparaissent dans cette combinaison linéaire. (2.2)

Etant donné qu'on parvient seulement (quand $A \to \infty$) à minorer la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par 1, $\zeta(2)$, $\zeta(3)$, ..., $\zeta(A)$ par $\frac{1+o(1)}{1+\log 2}\log A$, le fait d'avoir aussi les $\zeta(s)$ pour s pair rendrait complètement trivial ce résultat (puisque pour s pair, $\zeta(s)$ est un multiple rationnel de π^s et que π est transcendant).

Le but de cette partie est de généraliser cette approche aux polyzêtas. Rappelons que les *polyzêtas* sont les séries

$$\zeta(s_1, s_2, \dots, s_p) = \sum_{k_1 > k_2 > \dots > k_p \geq 1} \frac{1}{k_1^{s_1} k_2^{s_2} \cdots k_p^{s_p}}.$$

avec $p \geq 0$, $s_1 \geq 2$ et $s_2, \dots, s_p \geq 1$; lorsque $p = 0$, on pose $\zeta(s_1, s_2, \dots, s_p) = 1$. Les entiers p et $s_1 + s_2 + \dots + s_p$ sont respectivement la profondeur et le poids de $\zeta(s_1, s_2, \dots, s_p)$. Outre le fait que ces nombres apparaissent dans d'autres contextes des mathématiques ou de la physique, la motivation diophantienne pour les considérer est qu'ils forment une sous-algèbre de $\mathbb{R}$ et que de nombreuses relations algébriques existent entre ces nombres (voir par exemple [Wal00]). L'espoir serait d'utiliser ces relations algébriques dans une preuve diophantienne, idéalement pour démontrer que ce sont les seules ; cela impliquerait notamment que les nombres π, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, ... sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Cet espoir étant encore très lointain, on peut cependant déjà observer que le cadre des polyzêtas est naturel pour expliquer certaines preuves d'irrationalité déjà connues (par exemple l'approche de Sorokin [Sor98] pour démontrer l'irrationalité de $\zeta(3)$, voir l'équation (2.6) ci-dessous), et les résultats qui suivent montrent que des propriétés bien utiles sur les valeurs de ζ peuvent se généraliser aux polyzêtas.

Dans cette partie, on généralise les constructions rappelées précédemment aux polyzêtas en remplaçant les séries simples par des sommes multiples. Une première façon de le faire, particulièrement simple, est présentée d'abord (§2.1, [6]). Le reste de cette partie est consacré à une autre approche, peut-être plus prometteuse. On démontre un résultat général de décomposition en combinaison linéaire de polyzêtas (§2.2, [7]), puis on donne deux phénomènes de symétrie qui généralisent (2.2) (§2.3 et §2.4, [6] et [5]). Enfin on présente au paragraphe §2.5 un cadre plus général, celui des polyzêtas colorés, dans lequel se situe le seul résultat diophantien [2] de cette partie.

2.1 Des sommes découplées

La généralisation la plus directe de (2.1) et (2.2) est probablement le résultat suivant [6], qui est essentiellement obtenu par produit de p sommes simples mais mérite d'être observé :

Théorème 2.1. *Soient $p \geq 1$, $n \geq 0$ et $A \geq 1$ des entiers. Soit $P \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_p]$ un polynôme de degré $\leq A(n+1) - 2$ par rapport à chacune des variables, tel que*

$$P(X_1, \ldots, X_{j-1}, -X_j - n, X_{j+1}, \ldots, X_p) \\ = (-1)^{A(n+1)+1} P(X_1, \ldots, X_{j-1}, X_j, X_{j+1}, \ldots, X_p)$$

pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$. Alors la somme multiple

$$\sum_{k_1, \ldots, k_p \geq 1} \frac{P(k_1, \ldots, k_p)}{(k_1)_{n+1}^A \ldots (k_p)_{n+1}^A} \tag{2.3}$$

est un polynôme à coefficients rationnels de degré au plus p en les $\zeta(s)$, pour s entier impair compris entre 3 et A.

Par exemple, lorsque $A = 3$ ou $A = 4$, cette somme est un polynôme en $\zeta(3)$. Quand on prend $p = 1$, on retrouve exactement le phénomène de symétrie (2.2).

La preuve du théorème 2.1 consiste essentiellement (après avoir décomposé la fraction rationnelle en éléments simples) à séparer la somme multiple en un produit de p sommes simples auxquelles on applique le phénomène de symétrie (2.2). Elle utilise aussi un processus de régularisation, dans une situation simple et élémentaire.

L'inconvénient principal du théorème 2.1, du point de vue des applications éventuelles, est le fait que la somme sur k_1, …, k_p soit découplée.

Tout d'abord, les séries découplées donnent toujours des polynômes en valeurs de ζ en des entiers, même quand on omet l'hypothèse de symétrie du théorème 2.1. Cette remarque, qui découle de la preuve du théorème 2.1, montre que les polyzêtas ne peuvent pas intervenir réellement dans ce cadre.

En outre, les sommes multiples qui apparaissent dans les preuves d'irrationalité sont plutôt de la forme

$$\sum_{k_1 \geq \ldots \geq k_p \geq 1} \frac{P(k_1, \ldots, k_p)}{(k_1)_{n+1}^A \ldots (k_p)_{n+1}^A}, \tag{2.4}$$

c'est-à-dire que la somme porte sur des variables ordonnées. Elles semblent donc plus riches et plus prometteuses ; c'est pourquoi on s'intéresse dans toute la suite de cette partie à des sommes de cette forme.

2.2 Un résultat général de décomposition

Pour traiter aussi le cas des polylogarithmes, on considère maintenant des sommes (supposées convergentes) de la forme

$$\sum_{k_1 \geq \cdots \geq k_p \geq 1} \frac{P(k_1, \ldots, k_p)}{(k_1)_{n_1+1}^{A_1} \cdots (k_p)_{n_p+1}^{A_p}} z_1^{-k_1} \cdots z_p^{-k_p}, \tag{2.5}$$

avec $P(X_1, \ldots, X_p) \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_p]$, des entiers $A_j \geq 1$ et $n_j \geq 0$ et des nombres complexes z_i pour $1 \leq i \leq p$, tels que $|z_i| \geq 1$ pour tout i. Ces sommes sont des combinaisons linéaires de séries hypergéométriques multiples, mais l'aspect hypergéométrique n'étant pas explicitement utilisé on n'emploiera pas ce terme ici. Le fait qu'on somme sur $k_1 \geq \cdots \geq k_p \geq 1$, et non sur $k_1 > \cdots > k_p \geq 1$ comme dans la définition des polyzêtas, est une convention technique (de même que l'utilisation de $z_1^{-k_1}$ au lieu de $z_1^{k_1}$).

Du point de vue diophantien, le cas le plus intéressant est $z_1 = \ldots = z_p = 1$, mais des racines de l'unité peuvent aussi intervenir (voir §2.5), et dès que $z_1, \ldots, z_p$ sont algébriques il peut être intéressant de considérer ces séries.

Les séries de la forme (2.5) apparaissent à plusieurs reprises dans la littérature. Par exemple, Sorokin [Sor98] a déduit l'irrationalité de $\zeta(3)$ d'un résultat que l'on peut écrire ainsi : pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$n! \sum_{k_1 \geq k_2 \geq 1} \frac{(k_2 - n)_n (k_1 - k_2 + 1)_n}{(k_1)_{n+1}^2 (k_2)_{n+1}} = 2a_n \zeta(2,1) - b_n, \tag{2.6}$$

où a_n et b_n sont les nombres rationnels utilisés par Apéry [Apé79] dans sa preuve originelle de l'irrationalité de $\zeta(3)$. La méthode de Sorokin n'utilise pas directement la série (2.6) mais consiste à résoudre un problème d'approximation de Padé (voir par exemple [14], §1.8), qu'il n'est pas facile de généraliser à d'autres situations. Le point de vue utilisé ici, celui des sommes multiples, est plus facile à généraliser, et il englobe aussi l'approche par les intégrales multiples qui émane souvent des problèmes d'approximation de Padé. En effet, la proposition 2.1 de [7] (voir aussi le lemme 2 de [Zlo05]) montre que toute intégrale de la forme

$$\int_{[0,1]^D} \prod_{j=1}^{p} \frac{\prod_{\ell=d_{j-1}+1}^{d_j} x_\ell^{r_j} (1 - x_\ell)^{s_j}}{(z - x_1 \cdots x_{d_j})^{t_j+1}} \mathrm{d}x_j$$

avec $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$, et des entiers positifs $D, p \geq 1$, $r_1, \ldots, r_p$, $s_1, \ldots, s_p$, $t_1, \ldots, t_p$, $d_0, \ldots, d_p$ tels que $0 = d_0 < d_1 < d_2 < \cdots < d_p = D$, s'écrit comme combinaison linéaire de séries de la forme (2.5). Cela englobe les intégrales considérées par Sorokin ([Sor96], [Sor98]) et liées à l'approximation de Padé. Grâce à l'égalité entre intégrales de Sorokin et intégrales de Vasilyev [Vas01] démontrée dans [16] (et aussi, indépendamment, par Zlobin [Zlo02]), cette famille d'intégrales contient aussi celles introduites par Beukers [Beu79], Hata ([Hat95], [Hat00]) et Rhin-Viola ([RV96], [RV01]).

Avant d'énoncer le résultat de décomposition des séries (2.5), il semble naturel de justifier pourquoi nous nous sommes arrêtés à ce stade de généralité. Il y a notamment deux généralisations qui semblent naturelles, mais qui sont en fait contenues dans notre résultat.

La première est la méthode, fréquemment utilisée avec des séries simples, consistant à dériver la fraction rationnelle en k dans la série (2.1) avant de sommer ; cette astuce, appliquée plusieurs fois, permet de faire disparaître $\zeta(s)$ de la forme linéaire obtenue pour de petites valeurs de s. On peut imaginer l'utiliser pour des sommes multiples. Cependant il est clair qu'en dérivant une fraction rationnelle de la forme $P(X_1, \ldots, X_p)/\big((X_1)_{n_1+1}^{A_1} \ldots (X_p)_{n_p+1}^{A_p}\big)$ par rapport à l'une des variables X_j, on obtient une fraction rationnelle de la même forme (avec A_j remplacé par $A_j + 1$) : cette remarque montre que l'on ne perd rien à considérer des séries de la forme (2.5).

La seconde généralisation consisterait à remplacer, au dénominateur de (2.5), chaque facteur $(k_i)_{n_i+1}^{A_i}$ par $(k_i + r_i)_{n_i+1}^{A_i}$. Cela peut être utile si des bornes explicites apparaissent en fonction des n_i (et effectivement on peut y parvenir), mais pour des résultats qualitatifs comme ceux énoncés ici c'est inutile car on peut s'y ramener en remplaçant n_i par $n_i + r_i$ et en multipliant le numérateur par $(k_i)_{r_i}^{A_i}$.

Le résultat suivant [7] (qui a été obtenu indépendamment, dans le cas particulier $z_1 = \ldots = z_p$, par Zlobin [Zlo05]) montre comment se décompose une somme de la forme (2.5) lorsque $|z_j| > 1$ pour tout j (ce qui assure la convergence).

Théorème 2.2. *Supposons que pour tout j on ait $|z_j| > 1$. Alors la série (2.5) s'écrit comme une combinaison linéaire de polylogarithmes multiples $\mathrm{Li}_{s_1,\ldots,s_q}(1/\widehat{z}_1, \ldots, 1/\widehat{z}_q)$ où $0 \leq q \leq p$, $s_i \geq 1$ pour $i = 1, \ldots, q$, $\sum_{j=1}^{q} s_j \leq \sum_{j=1}^{p} A_j$ et où les $\widehat{z}_1, \ldots, \widehat{z}_q$ sont certains produits des $z_1, \ldots, z_p$. De plus les coefficients de cette combinaison linéaire sont des polynômes à coefficients rationnels en les $\big((1 - z_{j_1} \cdots z_{j_m})^{-1}\big)_{1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq p,\, m \geq 1}$ et les $(z_j^{\pm 1})_{1 \leq j \leq p}$.*

Les polylogarithmes multiples qui interviennent dans cet énoncé sont définis par

$$\mathrm{Li}_{s_1,\ldots,s_q}(1/\widehat{z}_1, \ldots, 1/\widehat{z}_q) = \sum_{k_1 > \cdots > k_q \geq 1} \frac{\widehat{z}_1^{-k_1} \cdots \widehat{z}_q^{-k_q}}{k_1^{s_1} \cdots k_q^{s_q}} ;$$

lorsque $q = 0$ il s'agit de la fonction identiquement égale à 1. On a bien sûr $\mathrm{Li}_{s_1,\ldots,s_q}(1, \ldots, 1) = \zeta(s_1, \ldots, s_q)$.

L'analogue du théorème 2.2 lorsque $z_1 = \cdots = z_p = 1$ s'énonce comme suit.

Théorème 2.3. *Toute série convergente de la forme (2.5) s'écrit lorsque $z_1 = \cdots = z_p = 1$ comme une combinaison linéaire à coefficients rationnels en les polyzêtas $\zeta(s_1, \ldots, s_q)$ où $0 \leq q \leq p$, $s_1 \geq 2$, $s_i \geq 1$ pour $i = 2, \ldots, q$ et $\sum_{j=1}^{q} s_j \leq \sum_{j=1}^{p} A_j$.*

Les preuves des théorèmes 2.2 et 2.3 utilisent de nombreuses manipulations sur les sommes multiples, et se font par récurrence sur p. Celle du théorème 2.3 fait également intervenir, de façon cruciale, la régularisation (dite “shuffle”, voir [Wal00]) des polyzêtas divergents.

Ces preuves fournissent des précisions supplémentaires par rapport aux énoncés ci-dessus (dénominateurs des coefficients rationnels, degrés des polynômes dans le cas des séries les plus simples, ...). De plus, elles se prêtent (pour tous $z_1, \ldots, z_p$) à une implémentation informatique que nous avons effectuée lorsque $z_1 = \cdots = z_p = 1$ sous GP/Pari. Le programme obtenu est disponible sur internet [8]. Il permet de tester de nombreuses séries et d'obtenir des résultats comme par exemple l'égalité suivante :

$$\sum_{k_1 \geq k_2 \geq 1} \frac{5k_2^2 - k_1^2 - 4k_1k_2 - 3k_1 + 7k_2}{(k_1)_3^4\,(k_2+1)_4^3}$$
$$= -\frac{153060027667}{1289945088} + \frac{832127737}{17915904}\zeta(2) + \frac{33349589}{2985984}\zeta(3) + \frac{10561397}{2985984}\zeta(4)$$
$$+ \frac{117277}{10368}\zeta(5) + \frac{1475}{1728}\zeta(6) + \frac{757}{432}\zeta(7) + \frac{6125}{1728}\zeta(2,2)$$
$$+ \frac{245}{24}\zeta(2,3) + \frac{35}{32}\zeta(3,2) + \frac{1}{6}\zeta(3,3) + \frac{595}{864}\zeta(4,2) + \frac{7}{4}\zeta(4,3).$$

C'est grâce à cette implémentation que nous avons pu constater les phénomènes de symétrie décrits dans la suite de cette partie, puis les démontrer. Bien entendu, les résultats ci-dessous sont à chaque fois démontrés "à la main", le seul rôle de l'ordinateur ayant été de suggérer les conjectures et de les tester.

Le reste de cette partie est donc consacré à différents phénomènes de symétrie qui généralisent (2.2), c'est-à-dire à la recherche de conditions suffisantes sur P pour que seulement certains polyzêtas parmi ceux prévus par le théorème 2.3 apparaissent effectivement dans la combinaison linéaire.

2.3 Un premier phénomène de symétrie

Pour $p \geq 0$ et $s_1, \ldots, s_p \geq 2$ entiers, posons

$$\zeta^{\mathrm{as}}(s_1, \ldots, s_p) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon_\sigma \zeta(s_{\sigma(1)}, \ldots, s_{\sigma(p)}),$$

où ε_σ désigne la signature de la permutation σ. On appelle *polyzêta antisymétrique* une telle combinaison linéaire de polyzêtas (même si, pour $p \geq 2$, ce n'est pas en général un polyzêta). Il s'agit de séries convergentes, puisque tous les s_i sont supposés être supérieurs ou égaux à 2. Pour $p = 1$, on a $\zeta^{\mathrm{as}}(s) = \zeta(s)$. La convention naturelle consiste à poser $\zeta^{\mathrm{as}}(s_1, \ldots, s_p) = 1$ lorsque $p = 0$. Pour $p = 2$, on a $\zeta^{\mathrm{as}}(s_1, s_2) = \zeta(s_1, s_2) - \zeta(s_2, s_1)$ et lorsque $p = 3$, on a

$$\zeta^{\mathrm{as}}(s_1, s_2, s_3)$$
$$= \zeta(s_1, s_2, s_3) + \zeta(s_2, s_3, s_1) + \zeta(s_3, s_1, s_2) - \zeta(s_2, s_1, s_3) - \zeta(s_1, s_3, s_2) - \zeta(s_3, s_2, s_1).$$

Par définition, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ on a $\zeta^{\mathrm{as}}(s_{\sigma(1)}, \ldots, s_{\sigma(p)}) = \varepsilon_\sigma \zeta^{\mathrm{as}}(s_1, \ldots, s_p)$, et $\zeta^{\mathrm{as}}(s_1, \ldots, s_p) = 0$ dès que deux des s_i sont égaux.

Il semble raisonnable de penser qu'en général, un poyzêta antisymétrique n'est pas un polynôme en valeurs de la fonction ζ de Riemann. En revanche, tout polyzêta "symétrique" (défini comme $\zeta^{\mathrm{as}}(s_1, \ldots, s_p)$ mais en omettant la signature ε_σ) est un polynôme en les valeurs $\zeta(s)$ (d'après [Hof92], Theorem 2.2).

Dans tout ce paragraphe, on suppose n pair car les preuves ne sont rédigées que dans ce cas. Cette restriction ne devrait pas être un obstacle à d'éventuelles applications diophantiennes. Par ailleurs, il semble raisonnable d'espérer que les énoncés ci-dessous soient vrais aussi quand n est impair.

Théorème 2.4. *Soient $n \geq 0$ et $A, p \geq 1$ des entiers. Soit $P \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_p]$ de degré $\leq A(n+1) - 2$ par rapport à chacune des variables, tel que :*

$$\begin{cases} \text{Pour tout } \sigma \in \mathfrak{S}_p, \text{ on ait} \\ \qquad P(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(p)}) = \varepsilon_\sigma P(X_1, X_2, \ldots, X_p). \\ \\ \text{Pour tout } j \in \{1, \ldots, p\}, \text{ on ait} \\ \qquad P(X_1, \ldots, X_{j-1}, -X_j - n, X_{j+1}, \ldots, X_p) \\ \qquad\qquad = (-1)^{A(n+1)+1} P(X_1, \ldots, X_{j-1}, X_j, X_{j+1}, \ldots, X_p). \end{cases} \tag{2.7}$$

Alors la série

$$\sum_{k_1 \geq \ldots \geq k_p \geq 1} \frac{P(k_1, \ldots, k_p)}{(k_1)_{n+1}^A \ldots (k_p)_{n+1}^A} \tag{2.8}$$

est une combinaison linéaire, à coefficients rationnels, de produits de la forme

$$\zeta(s_1) \ldots \zeta(s_q) \zeta^{\mathrm{as}}(s'_1, \ldots, s'_{q'})$$

avec

$$\begin{cases} q, q' \geq 0 \text{ entiers tels que } 2q + q' \leq p, \\ s_1, \ldots, s_q, s'_1, \ldots, s'_{q'} \text{ entiers impairs } \geq 3, \\ s_i \leq 2A - 1 \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, q\}, \\ s'_i \leq A \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, q'\}. \end{cases} \tag{2.9}$$

La preuve [6] du théorème 2.4 utilise notamment la régularisation $\star$ (dite "stuffle", voir [Wal00]) des polyzêtas. Le cœur de la preuve est une récurrence sur la profondeur p, qui démontre le théorème mais ne l'explique pas vraiment. Il serait intéressant de disposer d'une autre preuve, plus directe, de ce résultat.

Il est important de bien visualiser l'ensemble des produits de polyzêtas qui apparaissent dans ce théorème. Par exemple, lorsque $q' = 0$ le polyzêta antisymétrique $\zeta^{\mathrm{as}}(s'_1, \ldots, s'_{q'})$ vaut 1 et on obtient un produit de valeurs de ζ en des entiers impairs. Lorsque $q = q' = 0$, ce produit est vide et on obtient 1.

Si $p = 1$, le théorème 2.4 affirme que (2.8) est une combinaison linéaire de 1 et des $\zeta(s)$ pour s impair tel que $3 \leq s \leq A$: on retrouve le phénomène de symétrie (2.2).

Si $p = 2$, on obtient une combinaison linéaire de 1, de valeurs $\zeta(s)$ avec s entier impair compris au sens large entre 3 et 2A, et de différences $\zeta(s, s') - \zeta(s', s)$ avec s, s' entiers impairs tels que $3 \leq s < s' \leq A$.

Si $p = 3$, ce théorème affirme que la série est une combinaison linéaire, à coefficients rationnels :

– de produits d'au plus deux valeurs de ζ en des entiers impairs ≥ 3,

– de polyzêtas antisymétriques $\zeta^{\mathrm{as}}(s_1, s_2)$ avec $s_1, s_2 \geq 3$ impairs,

– de polyzêtas antisymétriques $\zeta^{\mathrm{as}}(s_1, s_2, s_3)$ avec $s_1, s_2, s_3 \geq 3$ impairs.

En profondeur $p \geq 4$, des termes tels que $q \geq 1$ et $q' \geq 2$ peuvent apparaître : il semble que la série obtenue ne soit pas toujours la somme d'un polynôme en valeurs $\zeta(s)$ (avec s impair) et d'une combinaison linéaire de polyzêtas antisymétriques $\zeta^{\mathrm{as}}(s_1, \ldots, s_q)$ avec $s_1, \ldots, s_q$ impairs. A l'inverse, on peut affaiblir la conclusion du théorème 2.4 en disant que la série est un polynôme (à coefficients rationnels) en les polyzêtas antisymétriques $\zeta^{\mathrm{as}}(s_1, \ldots, s_q)$ avec $1 \leq q \leq p$ et $s_1, \ldots, s_q \geq 3$ impairs tels que $s_1 + \ldots + s_q \leq pA$.

Lorsque $A \leq 2$, on a forcément $q' = 0$ pour tous les produits qui apparaissent, ce qui fournit le corollaire suivant :

Corollaire 2.5. *Sous les hypothèses du théorème 2.4, si $A \leq 2$ alors la série* (2.8) *est un polynôme en $\zeta(3)$ à coefficients rationnels.*

Le théorème 2.4 s'applique aussi, par exemple, aux séries convergentes

$$\sum_{k_1 \geq \ldots \geq k_p \geq 1} \left[\prod_{i=1}^{p} (k_i + \frac{n}{2})\right]^{\varepsilon} \frac{\left[\prod_{1 \leq i < j \leq p} (k_i - k_j - r)_{2r+1} (k_i + k_j + n - r)_{2r+1}\right] \left[\prod_{i=1}^{p} (k_i - t)_{2t+n+1}\right]}{(k_1)_{n+1}^{A} \ldots (k_p)_{n+1}^{A}}$$

avec $n, r, t, \varepsilon \geq 0$ et $A, p \geq 1$ entiers tels que $\varepsilon \equiv (A+1)(n+1)+1 \bmod 2$ et $\varepsilon + (4r+2)p + 2t \leq (A-1)(n+1) + 4r$.

2.4 Un deuxième phénomène de symétrie

Dans ce paragraphe [5], on fixe des entiers $p \geq 1$ et $A_1, \ldots, A_p, n_1, \ldots, n_p, r_1, \ldots, r_p \geq 0$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ on pose $K_i = k_i + r_i + \frac{n_i}{2}$ (même si l'entier n_i n'est pas supposé pair), de telle sorte que $(k_i + r_i)_{n_i+1} = (K_i - \frac{n_i}{2})_{n_i+1}$ est une fonction paire (resp. impaire) de K_i si n_i est pair (resp. impair).

On considère des permutations des variables $K_1, \ldots, K_p$, et des changements de signe $K_i \mapsto -K_i$. On désigne par la même lettre (souvent P) une fonction de $k_1, \ldots, k_p$ et la fonction correspondante de $K_1, \ldots, K_p$, par exemple $P(k_1, k_2) = (k_1 + r_1 + \frac{n_1}{2})(k_2 + r_2 + \frac{n_2}{2})$ et $P(K_1, K_2) = K_1 K_2$. Les variables K_i sont plus adaptées pour écrire facilement les propriétés de symétrie utiles ici ; par exemple, pour $i \in \{1, \ldots, p\}$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, la relation

$P(K_1,\dots,K_{i-1},-K_i,K_{i+1},\dots,K_p) = \varepsilon P(K_1,\dots,K_p)$ équivaut à $P(k_1,\dots,k_{i-1},-k_i-2r_i-n_i,k_{i+1},\dots,k_p) = \varepsilon P(k_1,\dots,k_p)$; en particulier, l'hypothèse (2.2) s'écrit $P(-K_1) = (-1)^{A(n+1)+1}P(K_1)$ avec $r_1=0$. De même, lorsque $p=2$, l'égalité $P(K_2,K_1) = -P(K_1,K_2)$ est équivalente à l'hypothèse (2.10) du corollaire 2.7 ci-dessous.

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_p$ agit sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p$ par $\gamma\cdot(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p) = (\varepsilon_{\gamma^{-1}(1)},\dots,\varepsilon_{\gamma^{-1}(p)})$ pour $\gamma\in\mathfrak{S}_p$ et $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p)\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p$, ce qui permet de définir le produit semi-direct $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p \rtimes \mathfrak{S}_p$; on note $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p,\gamma)$ les éléments de G.

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ (en pratique, $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$). Notons $V_{\mathbb{K}}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel formé par les fractions rationnelles $R(k_1,\dots,k_p)$ de la forme

$$R(k_1,\dots,k_p) = \frac{P(k_1,\dots,k_p)}{(k_1+r'_1)_{n'_1+1}^{A'_1}\dots(k_p+r'_p)_{n'_p+1}^{A'_p}}$$

avec $P\in\mathbb{K}[k_1,\dots,k_p]$ et $A'_1,\dots,A'_p,n'_1,\dots,n'_p,r'_1,\dots,r'_p\geq 0$. En rappelant que $A_1,\dots,A_p$, $n_1,\dots,n_p$, $r_1,\dots,r_p\geq 0$ sont fixés dans tout ce paragraphe, on note $V'_{\mathbb{K}}$ le sous-espace de $V_{\mathbb{K}}$ formé par les fractions rationnelles

$$R(k_1,\dots,k_p) = \frac{P(k_1,\dots,k_p)}{(k_1+r_1)_{n_1+1}^{A_1}\dots(k_p+r_p)_{n_p+1}^{A_p}}$$

avec $P\in\mathbb{K}[k_1,\dots,k_p]$ tel que $\sum_{i=1}^{j}\deg_{k_i}R\leq -j-1$ pour tout $j\in\{1,\dots,p\}$, ce qui assure la convergence de la série dans le théorème 2.6 ci-dessous.

On définit un homomorphisme de groupes $\varrho : G\to \mathrm{GL}(V_{\mathbb{K}})$ en posant

$$\varrho(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p,\gamma)(R(K_1,\dots,K_p)) = R(\varepsilon_{\gamma(1)}K_{\gamma(1)},\dots,\varepsilon_{\gamma(p)}K_{\gamma(p)})$$

où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est vu comme étant $\{-1,1\}$ (et on le voit ainsi dans tout ce paragraphe).

Par ailleurs, notons $W_{\mathbb{K}}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par des symboles formels $\zeta_{\mathrm{f}}(s_1,\dots,s_p)$ pour $s_1,\dots,s_p\in\mathbb{N}^*$ (rappelons que p est fixé) ; ces symboles sont supposés être $\mathbb{K}$-linéairement indépendants, et forment donc une base de $W_{\mathbb{K}}$. Notons $W'_{\mathbb{K}}$ le sous-espace de $W_{\mathbb{K}}$ engendré par les symboles $\zeta_{\mathrm{f}}(s_1,\dots,s_p)$ avec $s_1\geq 2$.

On a une application de spécialisation $\varphi : W'_{\mathbb{K}}\to\mathbb{C}$, qui est $\mathbb{K}$-linéaire et envoie chaque polyzêta "formel" $\zeta_{\mathrm{f}}(s_1,\dots,s_p)$ sur le polyzêta $\zeta(s_1,\dots,s_p)$ (qui existe puisque $s_1\geq 2$). Cette application n'est *pas* injective (si $p\geq 2$), puisqu'il existe des relations linéaires entre polyzêtas de profondeur fixée p.

On définit une représentation $\tilde{\varrho} : G\to\mathrm{GL}(W_{\mathbb{K}})$ par linéarité en posant :

$$\tilde{\varrho}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p,\gamma)(\zeta_{\mathrm{f}}(s_1,\dots,s_p)) = \varepsilon_1^{s_{\gamma^{-1}(1)}}\dots\varepsilon_p^{s_{\gamma^{-1}(p)}}\zeta_{\mathrm{f}}(s_{\gamma^{-1}(1)},\dots,s_{\gamma^{-1}(p)}).$$

Il faut être attentif au fait que $\tilde{\varrho}$ n'induit pas (via φ) une représentation de G sur l'espace vectoriel engendré par les polyzêtas de profondeur p, puisque $\tilde{\varrho}$ ne préserve pas les relations

$\mathbb{Q}$-linéaires auxquelles ils satisfont (par exemple, on a $4\zeta(2,4) + 13\zeta(4,2) - 18\zeta(3,3) = 0$ mais $4\zeta(4,2) + 13\zeta(2,4) - 18\zeta(3,3) \neq 0$).

L'intérêt de ce formalisme réside dans le résultat suivant, qui est un complément au théorème 2.3.

Théorème 2.6. *Soient H un sous-groupe de G, et χ un homomorphisme de H dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$. Soit*

$$R(k_1, \ldots, k_p) = \frac{P(k_1, \ldots, k_p)}{(k_1 + r_1)_{n_1+1}^{A_1} \ldots (k_p + r_p)_{n_p+1}^{A_p}} \in V'_{\mathbb{K}}$$

telle que $\varrho(g)(R) = \chi(g)R$ pour tout $g \in H$. Alors la série convergente $\sum_{k_1 \geq \ldots \geq k_p \geq 1} R(k_1, \ldots, k_p)$ est une combinaison linéaire de polyzêtas de profondeur au plus p, dans laquelle la partie de profondeur p peut s'écrire $\varphi(x)$ avec $x \in W'_{\mathbb{K}}$ tel que $\tilde{\varrho}(g)(x) = \chi(g)x$ pour tout $g \in H$.

Ici et dans tout ce paragraphe, la partie de profondeur k d'une combinaison linéaire $\sum_{j=0}^{p} \sum_{s_1,\ldots,s_j} \lambda_{s_1,\ldots,s_j} \zeta(s_1, \ldots, s_j)$ est $\sum_{s_1,\ldots,s_k} \lambda_{s_1,\ldots,s_k} \zeta(s_1, \ldots, s_k)$.

Considérons l'exemple suivant : $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $n_1 = \ldots = n_p = n$, $A_1 = \ldots = A_p = A$, $H = G$ et $\chi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, \gamma) = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p \varepsilon_\gamma$ où ε_γ est la signature de γ. Alors l'hypothèse $\varrho(g)(R) = \chi(g)R$ pour tout $g \in H$ signifie que $P(k_1, \ldots, k_p)$ vérifie les conditions (2.7) du théorème 2.4. Le théorème 2.6 montre que la partie de profondeur p est une combinaison linéaire de polyzêtas antisymétriques (voir le début du paragraphe 2.3 pour la définition de ce terme). Le théorème 2.4 implique cela, et donne des résultats intéressants sur l'ensemble de la combinaison linéaire, et pas seulement sur sa partie de profondeur p. Il serait intéressant d'obtenir, pour d'autres sous-groupes H ou d'autres caractères χ, des résultats qui contiennent le théorème 2.6 et donnent des informations sur l'ensemble de la combinaison linéaire. Quelques conjectures dans cette direction sont données, lorsque $p = 3$, dans la partie 4 de [5].

Lorsque $H = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p \times \{\mathrm{Id}\}$ et $\chi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, \mathrm{Id}) = \varepsilon_1^{e_1} \ldots \varepsilon_p^{e_p}$ avec $e_1, \ldots, e_p \in \mathbb{Z}$, l'hypothèse du théorème 2.6 s'écrit

$$P(k_1, \ldots, k_{i-1}, -k_i - 2r_i - n_i, k_{i+1}, \ldots, k_p) = (-1)^{A_i(n_i+1)+e_i} P(k_1, \ldots, k_p)$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$; elle signifie que P est une combinaison linéaire de monômes décalés $\left(k_1 + r_1 + \frac{n_1}{2}\right)^{f_1} \ldots \left(k_p + r_p + \frac{n_p}{2}\right)^{f_p}$ avec $f_i \equiv A_i(n_i + 1) + e_i \bmod 2$ pour tout i. La conclusion signifie que si un polyzêta $\zeta(s_1, \ldots, s_p)$ de profondeur p apparaît avec un coefficient non nul dans la combinaison linéaire alors $s_i \equiv e_i \bmod 2$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$. En fait, il est un peu abusif dans cette phrase de parler de "la" combinaison linéaire donnée par le théorème 2.3, puisqu'en utilisant des relations linéaires on peut en trouver d'autres. L'énoncé exact serait plutôt qu'une des combinaisons linéaires données par le théorème 2.3 vérifie la propriété supplémentaire de parité.

De façon analogue, le théorème 2.6 appliqué avec $p = 2$ et $H = \{(1, 1)\} \times \mathfrak{S}_2$ donne :

Corollaire 2.7. *Soient $n, r_1, r_2 \geq 0$ des entiers tels que $r_1 \geq r_2 + n + 1$. Soit $P \in \mathbb{Q}[k_1, k_2]$ de degré $\leq 3n + 1$ par rapport à chacune des deux variables, tel que*

$$P(k_2 + r_2 - r_1, k_1 + r_1 - r_2) = -P(k_1, k_2). \tag{2.10}$$

Alors la série convergente

$$\sum_{k_1 \geq k_2 \geq 1} \frac{P(k_1, k_2)}{(k_1 + r_1)_{n+1}^3 (k_2 + r_2)_{n+1}^3}$$

est une combinaison $\mathbb{Q}$-linéaire de 1, $\zeta(2)$, $\zeta(3)$ et $\zeta(2,3) - \zeta(3,2)$.

L'hypothèse (2.10) signifie que P est une combinaison linéaire de produits $(k_1+k_2)^{f_1}(k_1 - k_2 + r_1 - r_2)^{f_2}$ avec f_2 impair. Pour démontrer le corollaire 2.7, on n'utilise pas seulement les théorèmes 2.3 et 2.6 mais aussi le théorème 5 de [Zlo05] qui restreint, par rapport au théorème 2.3, l'ensemble des polyzêtas intervenant dans la forme linéaire lorsque les symboles de Pochhammer au dénominateur sont décalés (ce qui correspond ici à l'hypothèse $r_1 \geq r_2 + n + 1$). Le théorème 5 de [Zlo05] affirme que, sous les hypothèses du corollaire 2.7 mais sans supposer (2.10), on obtient une combinaison linéaire de 1, $\zeta(2)$, $\zeta(3)$, $\zeta(2,2)$, $\zeta(2,3)$, $\zeta(3,2)$, $\zeta(3,3)$.

2.5 Polyzêtas colorés

Certaines preuves d'irrationalité analogues à celles sur les valeurs de ζ sortent du cadre des polyzêtas, et font intervenir les *polyzêtas colorés* définis (sous réserve de convergence) par

$$\zeta(s_1, \ldots, s_p; u_1, \ldots, u_p) = \sum_{k_1 > \ldots > k_p \geq 1} \frac{u_1^{k_1} \ldots u_p^{k_p}}{k_1^{s_1} \ldots k_p^{s_p}}$$

pour $s_1, \ldots, s_p \geq 1$ et $u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{C}$ racines de l'unité. Ce sont les valeurs en des racines de l'unité des polylogarithmes multiples $\mathrm{Li}_{s_1,\ldots,s_p}(z_1, \ldots, z_p)$ définis après le théorème 2.2. Lorsque $p = 1$ on obtient notamment $\zeta(s_1; -1) = \mathrm{Li}_{s_1}(-1)$ qui vaut $-\log(2)$ pour $s_1 = 1$ et $(1 - 2^{1-s_1})\zeta(s_1)$ pour $s_1 \geq 2$. On peut aussi interpréter en ces termes la fonction β d'Euler définie par $\beta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$. En notant χ l'unique caractère de Dirichlet non principal modulo 4, défini par $\chi(k) = 0$ pour k pair, $\chi(k) = 1$ pour $k \equiv 1 \bmod 4$ et $\chi(k) = -1$ pour $k \equiv 3 \bmod 4$, on a $\beta(s) = L(s, \chi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\chi(k)}{k^s}$. Comme $\chi(k) = \frac{i^k - (-i)^k}{2i}$, on a $\beta(s) = \frac{\zeta(s;i) - \zeta(s;-i)}{2i}$.

Le théorème 2.2 devrait pouvoir se généraliser sans trop de difficultés au cas où les z_i sont des racines de l'unité, puisque le cas le plus délicat a été traité dans le théorème 2.3. En revanche en profondeur $p \geq 2$ aucun phénomène de symétrie n'est connu, et l'algorithme [8] n'est pas implémenté dans ce cas. Cependant il est possible que les propriétés décrites ci-dessus (§§2.3 et 2.4) se généralisent partiellement. En profondeur $p = 1$, la symétrie (2.2) se généralise dès que la série hypergéométrique correspondante est bien équilibrée. C'est ainsi que Rivoal et Zudilin ont démontré [RZ03] des résultats pour $\beta(s)$ qui sont analogues à ceux démontrés depuis 2000 pour $\zeta(s)$. Ils utilisent des séries du type

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{P(k)}{(k+\frac{1}{2})_{n+1}^A}(-1)^k = 2^{A(n+1)} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{P(\frac{\ell-1}{2})}{(\ell)_{n+1}^A}\chi(\ell) \tag{2.11}$$

où χ est le caractère de Dirichlet défini précédemment.

On peut aussi obtenir un résultat diophantien [2] en utilisant les valeurs de $\zeta(s;-1)$ rappelées ci-dessus :

Théorème 2.8. *Il existe un entier impair $j \in \{3,5,\ldots,93\}$ tel que 1, $\log 2$ et $\zeta(j)$ soient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.*

Ce théorème signifie que 1, $\log 2$, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, …, $\zeta(93)$ engendrent un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 3. Si on omet $\log 2$, ce résultat n'est connu qu'en remplaçant 93 par 139 (c'est le théorème 4.5 au paragraphe 4.2). La preuve du théorème 2.8 utilise le critère d'indépendance linéaire de Nesterenko ; le raffinement démontré au paragraphe 4.2 ne donne pas d'amélioration.

La principale nouveauté dans la preuve du théorème 2.8 est la construction des formes linéaires : pour $A, r \geq 1$ avec A pair, on pose

$$\widetilde{h}_n = 2\frac{(2^{-2n}(2n)!)^A}{n!^{2r}} \sum_{k=1}^{\infty}\Big(k+\frac{n}{2}\Big)\frac{(k-rn)_{rn}(k+n+1)_{rn}}{\prod_{j=0}^{2n}(k+j/2)^A} \tag{2.12}$$

et on démontre que

$$\widetilde{h}_n = \widetilde{a}_{0,n} + \widetilde{a}_{1,n}\log 2 + \sum_{i=2}^{A/2}\widetilde{a}_{i,n}\zeta(2i-1),$$

avec $\widetilde{a}_{0,n}, \ldots, \widetilde{a}_{A/2,n} \in \mathbb{Q}$. L'originalité réside dans le dénominateur de (2.12), qui contient des facteurs du type $k+h$ à la fois pour h entier (comme dans (2.1)) et pour h demi-entier (comme dans (2.11)).

3 Approximation rationnelle d'un nombre

Le point de départ de cette partie est le lemme 3.1 énoncé au paragraphe 3.1 ci-dessous. Il s'agit d'un énoncé facile à démontrer, qui permet de majorer l'exposant d'irrationalité $\mu(\xi)$ d'un nombre réel ξ à partir de l'existence d'une suite de formes linéaires $u_n\xi - v_n$ à coefficients entiers, qui tend vers 0 géométriquement et telle que la suite (u_n) soit à croissance géométrique. Bien entendu l'existence d'une telle suite implique l'irrationalité de ξ, et ce lemme quantifie cette observation.

Au paragraphe 3.1, on démontre une réciproque [3] à ce lemme. Puis, au paragraphe 3.3, on généralise [4] ce lemme et sa réciproque pour tenir compte d'une propriété supplémentaire : le fait que u_n soit multiple de δ_n, où (δ_n) est une suite d'entiers tels que δ_n divise δ_{n+1}. Cette propriété est satisfaite avec $\delta_n = d_n^3$ (où d_n est le p.p.c.m. des entiers 1, 2, …, n) par les formes linéaires $u_n\zeta(3) - v_n$ construites par Apéry.

3.1 Une réciproque au critère habituel

Pour majorer l'exposant d'irrationalité d'un nombre réel, on utilise souvent le critère suivant ou une de ses variantes ; rappelons que $o(1)$ désigne n'importe quelle suite qui tend vers 0 quand $n \to \infty$.

Lemme 3.1. *Soient $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\tau > 0$. Supposons qu'il existe des suites d'entiers (u_n) et (v_n) telles que $u_n \neq 0$ pour tout n,*

$$u_n\xi - v_n \to 0, \qquad |u_{n+1}\xi - v_{n+1}| = |u_n\xi - v_n|^{1+o(1)}, \qquad \textit{et} \qquad |u_n\xi - v_n| \leq |u_n|^{-\tau+o(1)}.$$

Alors on a $\mu(\xi) \leq 1 + \frac{1}{\tau}$.

Un aspect essentiel du lemme 3.1 est que les suites (u_n) et $(u_n\xi - v_n)$ sont supposées essentiellement géométriques. Une telle hypothèse est nécessaire dans cet énoncé puisque les approximations rationnelles v_n/u_n de ξ sont beaucoup moins précises que celles données par le développement en fraction continue. On demande notamment que $|u_{n+1}\xi - v_{n+1}|$ ne soit pas trop petit (en fonction de $|u_n\xi - v_n|$) ; on retrouve une hypothèse de ce genre dans le critère de Nesterenko (voir le chapitre 4).

Le résultat suivant [3] est une réciproque au lemme 3.1 :

Théorème 3.2. *Soit $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Soient (Q_n) et (ε_n) deux suites de nombres réels positifs telles que*

$$\lim_{n\to+\infty} Q_n = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0 \qquad \textit{et} \qquad \varepsilon_n \geq Q_n^{-\frac{1}{\mu-1}+o(1)},$$

où μ est un nombre réel tel que $\mu > \mu(\xi)$. Alors il existe des suites d'entiers (u_n) et (v_n) telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{Q_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n\xi - v_n}{\varepsilon_n} = 1.$$

Contrairement au lemme 3.1, on suppose seulement dans ce théorème que ε_n n'est pas trop petit. On déduit de ce résultat que l'exposant de densité de ξ défini dans [11] est toujours nul (sauf si ξ est un nombre de Liouville, auquel cas il est infini). Cet exposant n'a donc pas l'intérêt espéré. L'objectif initial de [11] était de chercher une propriété d'approximation rationnelle satisfaite par les périodes (par exemple au sens de [KZ01]) mais pas par les autres nombres réels irrationnels (ou, au moins, seulement par un nombre dénombrable d'entre eux ; rappelons qu'au sens de [KZ01] les périodes forment un ensemble dénombrable). On a volontairement tenté d'y parvenir sans faire référence au fait que toutes les suites d'approximations rationnelles utilisées dans [11] satisfont des récurrences linéaires d'ordre fini à coefficients polynomiaux. Pour être plus précis, les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont telles que les séries entières $\sum_{n\geq 0} u_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n z^n$ soient des G-fonctions (rappelons qu'une G-fonction est une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ qui a un rayon de convergence fini et strictement positif, est solution d'une équation différentielle linéaire, et est telle que le ppcm des dénominateurs de $a_0, a_1, \ldots, a_n$ soit majoré par C^n pour une certaine constante $C > 0$). En ajoutant une contrainte de ce type sur les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$, on pourrait modifier l'exposant de densité défini dans [11]. Comme le nombre de telles suites est dénombrable, ce nouvel exposant de densité serait infini pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, sauf pour un nombre dénombrable de ξ ; et les majorations obtenues dans [11] resteraient valables (voir aussi [Ada07]).

Pour démontrer le théorème 3.2, l'étape cruciale est le lemme suivant, démontré au sein de la preuve du Lemme 7.3 de [11] (p. 39).

Lemme 3.3. *Soient c, c', ε, Q des réels tels que $1 < c < c' < 2$, $0 < \varepsilon < 1$ et $Q > 1$. Soit $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $0 < \xi < 1$. Alors l'une au moins des propriétés suivantes est vérifiée :*

(i) Il existe des entiers $u \geq 1$ et $v \in \{0, \dots, u\}$, premiers entre eux, tels que

$$u < \frac{2c^2}{(c-1)(c'-c)} \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{et} \qquad \left| u\xi - v \right| \leq \frac{2}{c-1} \left(1 + \frac{c^2}{c'-c} \right) \frac{1}{Q}.$$

(ii) Il existe des entiers p et q tels que $Q \leq q \leq cQ$ et $\varepsilon \leq q\xi - p \leq c'\varepsilon$.

Ce lemme (qu'on démontre en utilisant les fractions de Farey) est intéressant lorsque ε est beaucoup plus grand que $1/Q$. Il signifie alors que, à moins que ξ ne soit très proche d'un nombre rationnel à dénominateur essentiellement majoré par $1/\varepsilon$, on peut trouver une fraction p/q (pas nécessairement irréductible) telle que q soit essentiellement de la taille de Q, et $q\xi - p$ de celle de ε. Le point important pour en déduire le théorème 3.2 est qu'on obtient $Q \leq q \leq cQ$ et $\varepsilon \leq q\xi - p \leq c'\varepsilon$ où c et c' sont des constantes qu'on peut choisir arbitrairement proches de 1. En utilisant les mêmes idées mais avec une preuve nettement plus simple, on peut démontrer une variante de ce lemme dans laquelle on obtient seulement $Q \leq q \leq 2Q$ et $\varepsilon \leq q\xi - p \leq 3\varepsilon$ (voir le lemme 5 de [4]). Cette variante conduit à une version faible du théorème 3.2, qui suffit cependant pour déduire la nullité de l'exposant de densité de ξ lorsque ξ n'est pas un nombre de Liouville.

3.2 Traduction en termes d'exposants

Soit $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Notons $\mathcal{T}(\xi)$ l'ensemble des $\tau > 0$ pour lesquels il existe des suites d'entiers (u_n) et (v_n) telles que $u_n \neq 0$ pour tout n,

$$u_n\xi - v_n \to 0, \qquad |u_{n+1}\xi - v_{n+1}| = |u_n\xi - v_n|^{1+o(1)}, \qquad \text{et} \qquad |u_n\xi - v_n| \leq |u_n|^{-\tau+o(1)}.$$

Posons $\tau(\xi) = \sup \mathcal{T}(\xi)$, avec la convention $\sup \emptyset = 0$. On a alors $\tau(\xi) \in [0, 1]$, et on déduit du lemme 3.1 et du théorème 3.2 le résultat suivant (dans lequel $\mu(\xi)$ est l'exposant d'irrationalité de ξ) :

Corollaire 3.4. *Pour tout $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ on a $\tau(\xi) = \frac{1}{\mu(\xi)-1} \in [0, 1]$. En particulier, on a $\tau(\xi) = 0$ si, et seulement si, ξ est un nombre de Liouville.*

Il en découle notamment que $\tau(\xi) = 1$ pour presque tout ξ au sens de la mesure de Lebesgue. En outre, l'un des intérêts du corollaire 3.4 est qu'on peut le généraliser partiellement à plusieurs variables (voir le théorème 4.1 au paragraphe 4.1).

3.3 Approximation rationnelle restreinte

Le lemme 3.1 et le théorème 3.2, résumés dans le corollaire 3.4, montrent que la précision des approximations rationnelles p/q dun nombre réel irrationnel ξ est liée à la petitesse des suites de formes linéaires en 1 et ξ à décroissance géométrique. On généralise maintenant ce résultat en considérant des formes linéaires en 1 et ξ avec une hypothèse de divisibilité sur le coefficient de ξ ; cela correspond à des approximations rationnelles p/q avec une condition de divisibilité sur q (voir le théorème 3.9 ci-dessous). Commençons par le résultat suivant, qui découle d'une généralisation du lemme 3.1 en utilisant les formes linéaires d'Apéry. Il s'agit de l'analogue, pour $\zeta(3)$, d'un résultat de Dubitskas [Dub90] sur $\log 2$. Rappelons que d_n est le p.p.c.m. des entiers 1, 2, …, n.

Théorème 3.5. *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tous $q \geq 1$ et $p \in \mathbb{Z}$ on ait*

$$\left|\zeta(3) - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c(\log q)^3}{q^2}$$

à condition que d_n^3 divise q, avec $n = \left[\frac{\log q}{\log((1+\sqrt{2})^4)}\right]$.

Corollaire 3.6. *Seulement un nombre fini de réduites p/q du développement en fraction continue de $\zeta(3)$ sont telles que d_n^3 divise q, avec $n = \left[\frac{\log q}{\log((1+\sqrt{2})^4)}\right]$.*

On va maintenant définir [4] un exposant d'approximation rationnelle restreinte (c'est-à-dire avec des conditions de divisibilité sur le dénominateur) qui permet d'interpréter le théorème 3.5 (en perdant le facteur $(\log q)^3$, remplacé par $q^{-\varepsilon}$, ce qui est normal avec ce genre d'exposants).

Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que :

$$\begin{cases} \text{Pour tout } q \geq 1,\ \varphi(q+1) \text{ est un multiple de } \varphi(q). \\ \text{La limite } \gamma_\varphi := \lim_{q\to\infty} \frac{\log \varphi(q)}{\log q} \text{ existe et vérifie } 0 \leq \gamma_\varphi < 1. \end{cases}$$

La définition suivante généralise celle de l'exposant d'irrationalité $\mu(\xi)$, qui est obtenu comme cas particulier lorsque φ est la fonction $\mathbf{1}$ définie par $\mathbf{1}(q) = 1$ pour tout q.

Définition 3.7. *Pour $\varphi \in \mathcal{E}$ et $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, le φ-*exposant d'irrationalité *de ξ est la borne supérieure, notée $\mu_\varphi(\xi)$, de l'ensemble des réels μ pour lesquels il existe une infinité de $q \geq 1$ tels que*

$$q \text{ est un multiple de } \varphi(q) \qquad \text{et} \qquad \left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^\mu} \quad \text{pour un certain } p \in \mathbb{Z}.$$

Lorsque cet ensemble est $\mathbb{R}$, on convient que $\mu_\varphi(\xi) = +\infty$. Si on pose $\varphi(q) = d_n^3$ où $n = [\frac{\log q}{\log((1+\sqrt{2})^4)}]$, alors $\varphi \in \mathcal{E}$ et le théorème 3.5 implique $\mu_\varphi(\zeta(3)) \leq 2$; on peut démontrer un résultat analogue pour $\zeta(2) = \pi^2/6$. Dans le cas de $\log(2)$, le résultat de Dubitskas mentionné ci-dessus implique $\mu_\varphi(\log(2)) \leq 2$ où $\varphi(q) = d_n$ avec $n = [\frac{\log q}{\log(3+2\sqrt{2})}]$. Par ailleurs, Rivoal a démontré [Riv07] que

$$\left|\log(2) - \frac{p}{2^n d_n}\right| \geq \frac{1}{(2^n d_n)^{1.948967}} \text{ pour tous } p \in \mathbb{Z} \text{ et } n \text{ assez grand,}$$

si bien que seul un nombre fini de réduites du développement en fraction continue de log(2) ont un dénominateur de la forme $2^n d_n$. Peut-être les méthodes de Rivoal (qui sont fondées sur l'approximation de Padé et s'appliquent aussi à $\log(r)$ pour d'autres nombres rationnels $r > 0$) peuvent-elles mener à des majorants strictement plus petits que 2 pour $\mu_\varphi(\log(r))$, pour certains $\varphi \in \mathcal{E}$ et $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$.

On peut démontrer que le φ-exposant d'irrationalité vérifie les propriétés suivantes, qui généralisent celles bien connues pour l'exposant d'irrationalité :

• Pour tout $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a $\mu_\varphi(\xi) \geq 2 - \gamma_\varphi$, avec égalité pour presque tout ξ au sens de la mesure de Lebesgue.

• Pour tout $\mu > 2 - \gamma_\varphi$, l'ensemble des nombres réels $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tels que $\mu_\varphi(\xi) \geq \mu$ est de dimension de Hausdorff $\frac{2-\gamma_\varphi}{\mu}$.

• Pour tout $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a $\mu_\varphi(\xi) = +\infty$ si et seulement si $\mu(\xi) = +\infty$ (c'est-à-dire, si et seulement si ξ est un nombre de Liouville).

Dans le cas de $\zeta(3)$, on déduit le résultat suivant du théorème 3.5 et de ce calcul de dimension de Hausdorff ; on obtient de même des résultats analogues pour $\zeta(2) = \pi^2/6$ et pour log(2).

Corollaire 3.8. *Pour tout $q \geq 1$, posons $\varphi(q) = d_n^3$ où $n = [\frac{\log q}{\log((1+\sqrt{2})^4)}]$. Notons E l'ensemble des $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tels que $\mu_\varphi(\xi) > 2$. Alors $\zeta(3) \notin E$ et la dimension de Hausdorff de E est 0.5745...*

Il semble que ce soit la dimension de Hausdorff la plus grande connue pour une partie de $\mathbb{R}$, définie par des conditions diophantiennes, qui ne contient pas $\zeta(3)$. Il est intéressant de noter que cette dimension est obtenue en utilisant les formes linéaires d'Apéry. Les variantes (dues à Hata, Rhin-Viola, ...) permettent d'améliorer la majoration de l'exposant d'irrationalité $\mu(\zeta(3))$, mais semblent toujours conduire à des ensembles E qui ont une dimension de Hausdorff plus petite.

Le lien entre une majoration de $\mu_\varphi(\xi)$ et l'existence de formes linéaires en 1 et ξ est donné par le résultat suivant, qui généralise le théorème 2 de [4]. Dans le cas où $\delta_n = 1$, c'est-à-dire qu'on omet la restriction de divisibilité sur les dénominateurs, on retrouve le corollaire 3.4 énoncé ci-dessus (§3.2) : l'assertion (*i*) correspond au lemme 3.1, et (*ii*) à un cas particulier du théorème 3.2.

Théorème 3.9. *Soit $\xi \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Soit $(\delta_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers strictement positifs telle que δ_n divise δ_{n+1} pour tout $n \geq 1$. Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs qui tend vers 0. On suppose que $\delta_{n+1} = \delta_n^{1+o(1)}$, $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n^{1+o(1)}$, et que la limite de $\frac{\log \delta_n}{-\log \varepsilon_n}$*

existe et appartient à $[0,1[$. *Alors on définit une fonction* $\varphi \in \mathcal{E}$ *en posant* $\varphi(q) = \delta_n$, *où* n *est le plus grand entier tel que* $\varepsilon_n \geq \frac{1}{q}$; *et pour tout* $\tau > 0$ *on a les implications suivantes :*

(i) *Si il existe deux suites d'entiers* $(u_n)_{n\geq 1}$ *et* $(v_n)_{n\geq 1}$ *telles que* $u_n \geq 0$,

$$\delta_n \textit{ divise } u_n \textit{ pour tout } n \geq 1, \qquad \frac{|u_n\xi - v_n|}{\delta_n} = \varepsilon_n^{1+o(1)} \qquad \textit{et} \qquad \frac{u_n}{\delta_n} \leq \varepsilon_n^{-1/\tau+o(1)}$$

alors on a $\mu_\varphi(\xi) \leq 1 + 1/\tau$.

(ii) *Si* $\mu_\varphi(\xi) < 1 + 1/\tau$ *alors il existe deux suites* $(u_n)_{n\geq 1}$ *et* $(v_n)_{n\geq 1}$ *satisfaisant aux propriétés du* (i).

Avec la construction d'Apéry, l'assertion (i) implique la version faible du théorème 3.5 énoncée après la définition 3.7.

Pour terminer, notons qu'il semble naturel d'imaginer que $\mu_\varphi(\xi) = 2 - \gamma_\varphi$ pour tout $\varphi \in \mathcal{E}$ lorsque ξ est une période, notamment un nombre algébrique irrationnel, $\log 2$, $\zeta(2)$ ou $\zeta(3)$. Dans le cas où ξ est un nombre algébrique irrationnel, le théorème de Ridout [Rid57] implique $\mu_\varphi(\xi) = 2 - \gamma_\varphi$ à condition que la réunion, lorsque q décrit $\mathbb{N}^*$, de l'ensemble des facteurs premiers de $\varphi(q)$ soit un ensemble fini. Cette condition n'est pas réalisée, par exemple, pour la fonction φ explicitée ci-dessus en lien avec $\zeta(3)$. Cependant elle est réalisée notamment lorsque φ est définie par $\varphi(q) = \prod_{i=1}^r b_i^{[\varepsilon_i \log q]}$, où $b_1, \ldots, b_r \geq 2$ sont des entiers et $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ des nombres réels strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^r \varepsilon_i \log b_i < 1$.

4 Le critère d'indépendance linéaire de Nesterenko

Soient $\xi_0, \ldots, \xi_r$ des nombres réels, avec $r \geq 1$. On considère des formes linéaires $L = \ell_0 X_0 + \ldots + \ell_r X_r$ à coefficients entiers ℓ_i ; on pose $H(L) = \max_{0\leq i\leq r} |\ell_i|$ et $L(\underline{\xi}) = \ell_0\xi_0 + \ldots + \ell_r\xi_r$, où $\underline{\xi}$ désigne le point $(\xi_0, \ldots, \xi_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$. Lorsque (L_n) est une suite de formes linéaires, on note $L_n = \ell_{0,n}X_0 + \ldots + \ell_{r,n}X_r$; on suppose toujours que les $\ell_{i,n}$ sont des entiers relatifs. On appelle *critère d'indépendance linéaire de Nesterenko* l'énoncé suivant [Nes85] (dans lequel $o(1)$ désigne n'importe quelle suite qui tend vers 0 quand $n \to \infty$) :

Supposons qu'il existe une suite (L_n) *de formes linéaires avec* $L_n(\underline{\xi}) \neq 0$ *pour tout* n *et*

$$L_n(\underline{\xi}) \to 0, \qquad |L_{n+1}(\underline{\xi})| = |L_n(\underline{\xi})|^{1+o(1)}, \qquad \textit{et} \qquad |L_n(\underline{\xi})| \leq H(L_n)^{-\tau+o(1)}$$

pour un certain $\tau > 0$. *Alors on a* $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\xi_0, \ldots, \xi_r) \geq \tau + 1$.

Dans cette partie, on donne une nouvelle preuve (§4.1) de ce critère, formulée [3] en termes d'exposants d'approximation ; elle permet de généraliser partiellement le corollaire 3.4 énoncé au paragraphe 3.2. Cette approche mène aussi (§4.2, [2]) à un raffinement du critère de Nesterenko, dans lequel on exploite des hypothèses de divisibilité sur les coefficients des formes linéaires (dans le même esprit qu'au paragraphe 3.3). En utilisant ce raffinement à la place du critère lui-même, on améliore légèrement certains résultats diophantiens.

4.1 Une nouvelle preuve du critère de Nesterenko

Dans tout ce paragraphe on suppose $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\xi_0, \ldots, \xi_r) \geq 2$, si bien que des formes linéaires en $\xi_0, \ldots, \xi_r$ à coefficients entiers peuvent être arbitrairement petites sans s'annuler. Notons $\mathcal{T}_r(\underline{\xi})$ l'ensemble des $\tau > 0$ pour lesquels il existe une suite (L_n) de formes linéaires telles que $L_n(\underline{\xi}) \neq 0$ pour tout n,

$$L_n(\underline{\xi}) \to 0, \qquad |L_{n+1}(\underline{\xi})| = |L_n(\underline{\xi})|^{1+o(1)}, \qquad \text{et} \qquad |L_n(\underline{\xi})| \leq H(L_n)^{-\tau+o(1)}.$$

Le théorème 4.1 ci-dessous montre que $\tau \leq s$ pour tout $\tau \in \mathcal{T}_r(\underline{\xi})$, en posant $s = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\xi_0, \ldots, \xi_r) - 1$. En posant $\tau_r(\underline{\xi}) = \sup \mathcal{T}_r(\underline{\xi})$, avec la convention $\sup \emptyset = 0$, on a donc $\tau_r(\underline{\xi}) \in [0, s]$.

Notons $\omega_0(\underline{\xi})$ la borne supérieure (éventuellement $+\infty$) de l'ensemble des $\omega > 0$ pour lesquels il existe une infinité de $(r+1)$-uplets $(q_0, \ldots, q_r) \in \mathbb{Z}^{r+1}$ avec

$$|q_i \xi_j - q_j \xi_i| \leq \max(|q_0|, \ldots, |q_r|)^{-\omega} \text{ pour tous } 1 \leq i < j \leq r. \tag{4.1}$$

Quitte à permuter $\xi_0, \ldots, \xi_r$, on peut supposer que $\xi_0 \neq 0$ et dans ce cas on peut remplacer (4.1) par

$$\left| \frac{\xi_j}{\xi_0} - \frac{q_j}{q_0} \right| \leq |q_0|^{-\omega-1} \text{ pour tout } j \in \{1, \ldots, r\}, \tag{4.2}$$

si bien que $\omega_0(\underline{\xi})$ mesure la qualité des approximations simultanées de $(\xi_1/\xi_0, \ldots, \xi_r/\xi_0)$ par des nombres rationnels ayant le même dénominateur q_0.

Lorsque $r = 1$ et $\xi_0 \neq 0$, avec les notations du paragraphe 3.2 on a $\tau_1(\xi_0, \xi_1) = \tau(\xi_1/\xi_0)$ et $\omega_0(\xi_0, \xi_1) = \mu(\xi_1/\xi_0) - 1$. Le résultat suivant est donc une généralisation partielle du corollaire 3.4.

Théorème 4.1. *Soient $\xi_0, \ldots, \xi_r \in \mathbb{R}$, avec $r \geq 1$. Alors on a $\tau_r(\underline{\xi}) \leq \frac{1}{\omega_0(\underline{\xi})} \leq s$, sous l'hypothèse que $s = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\xi_0, \ldots, \xi_r) - 1$ est strictement positif.*

On déduit de ce résultat la majoration $\tau_r(\underline{\xi}) \leq s$, qui est exactement le critère d'indépendance linéaire de Nesterenko énoncé dans l'introduction de cette partie. Les arguments ci-dessous [3] donnent donc une preuve simple de ce critère.

Quand $r = 1$, la majoration $\tau_1(\underline{\xi}) \leq \frac{1}{\omega_0(\underline{\xi})}$ dans le théorème 4.1 correspond au lemme 3.1 alors que l'inégalité $\frac{1}{\omega_0(\underline{\xi})} \leq 1$ signifie simplement $\mu(\xi) \geq 2$ (et une preuve de cela utilise le principe des tiroirs, comme ci-dessous en plusieurs variables). Il serait intéressant de savoir à quels $\underline{\xi}$ se généralise l'égalité $\tau_r(\underline{\xi}) = \frac{1}{\omega_0(\underline{\xi})}$ démontrée lorsque $r = 1$ dans le corollaire 3.4.

Pour démontrer le théorème 4.1, on traite séparément les deux inégalités.

La majoration $\tau_r(\underline{\xi}) \leq \frac{1}{\omega_0(\underline{\xi})}$ est essentiellement démontrée par Nesterenko [Nes85] dans la première étape de sa preuve par récurrence. On peut résumer la preuve comme suit. On dispose d'une suite (L_n) de formes linéaires (qui définissent des hyperplans H_n qu'on regarde dans $\mathbb{P}^r(\mathbb{R})$) et d'une très bonne approximation $(q_0, \ldots, q_r)$ de $(\xi_0, \ldots, \xi_r)$. On peut alors trouver un entier n pour lequel H_n a une hauteur pas trop grande et est proche de $(\xi_0, \ldots, \xi_r)$, donc aussi de $(q_0, \ldots, q_r)$; via une inégalité à la Liouville cela oblige $(q_0, \ldots, q_r)$ à appartenir à H_n. Mais alors la distance (projective) de $(\xi_0, \ldots, \xi_r)$ à H_n est majorée par la distance de $(\xi_0, \ldots, \xi_r)$ à $(q_0, \ldots, q_r)$, donc très petite : cela contredit la minoration satisfaite par $|L_n(\underline{\xi})|$.

Quant à la majoration $\frac{1}{\omega_0(\underline{\xi})} \leq s$, c'est-à-dire $\omega_0(\underline{\xi}) \geq 1/s$, elle est classique : après s'être ramené au cas où $\xi_0, \ldots, \xi_r$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, on applique le principe des tiroirs.

Cette nouvelle preuve du critère de Nesterenko a été reprise par Chantanasiri [Cha] en lien avec des critères de transcendance et d'indépendance algébrique ; elle permet aussi d'en obtenir un raffinement.

4.2 Un raffinement du critère de Nesterenko

4.2.1 Enoncé des résultats

L'énoncé suivant [2] raffine le critère de Nesterenko énoncé en introduction ; on le retrouve lorsque $\delta_{i,n} = 1$ pour tous i, n.

Théorème 4.2. *Soient $\xi_0, \ldots, \xi_r$ des nombres réels, avec $r \geq 1$. Soit $(L_n)_{n\geq 1}$ une suite de formes linéaires, avec $L_n = \ell_{0,n}X_0 + \ldots + \ell_{r,n}X_r$ et $\ell_{i,n} \in \mathbb{Z}$. Pour $n \geq 1$ et $i \in \{1, \ldots, r\}$, soit $\delta_{i,n}$ un diviseur strictement positif de $\ell_{i,n}$ tel que :*

1. *$\delta_{i,n}$ divise $\delta_{i+1,n}$ pour tout $n \geq 1$ et tout $i \in \{1, \ldots, r-1\}$.*
2. *$\dfrac{\delta_{j,n}}{\delta_{i,n}}$ divise $\dfrac{\delta_{j,n+1}}{\delta_{i,n+1}}$ pour tout $n \geq 1$ et tous $0 \leq i < j \leq r$, avec $\delta_{0,n} = 1$.*

Supposons qu'il existe $\tau > 0$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_r \geq 0$ et une suite d'entiers $(Q_n)_{n\geq 1}$ strictement croissante tels que, quand $n \to \infty$, on ait :

$$Q_{n+1} = Q_n^{1+o(1)}, \qquad H(L_n) \leq Q_n^{1+o(1)}, \qquad |L_n(\underline{\xi})| = Q_n^{-\tau+o(1)} \qquad \text{et} \qquad \delta_{i,n} = Q_n^{\gamma_i+o(1)}$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. Posons $s = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\xi_0, \ldots, \xi_r) - 1$. Alors on a

$$s \geq \tau + \gamma_1 + \cdots + \gamma_s.$$

Pour l'étude des valeurs de ζ, on utilise le cas particulier suivant.

Corollaire 4.3. *Soient $\xi_0, \ldots, \xi_r$ des nombres réels, avec $r \geq 1$. Soient $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 1$. Soit $(L_n)_{n\geq 1}$ une suite de formes linéaires telles que $\lim_{n\to\infty} |L_n(\underline{\xi})|^{1/n} = \alpha$ et $\limsup_{n\to\infty} H(L_n)^{1/n} \leq \beta$.*

Soient $0 \leq e_1 \leq \cdots \leq e_r$ des entiers tels que $d_n^{e_i}$ divise $\ell_{i,n}$ pour tout $n \geq 1$ et tout $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Posons $s = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\xi_0, \ldots, \xi_r) - 1$. Alors on a

$$s \geq \frac{e_1 + \cdots + e_s - \log \alpha}{\log \beta}.$$

Dans ce corollaire, comme dans le théorème 4.2, il convient de noter que le minorant obtenu pour s dépend lui aussi de s.

Il est intéressant de regarder ce qui se passe dans le théorème 4.2 quand on essaye seulement de démontrer que $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\xi_0, \ldots, \xi_r) \geq 3$. Alors on peut supposer, sans perte de généralité, que $\delta_{1,n} = \cdots = \delta_{r,n}$ pour tout n. Dans ce cas, les hypothèses 1 et 2 signifient simplement que $\delta_{1,n}$ divise $\delta_{1,n+1}$. En fait on peut remplacer cette hypothèse par une minoration du pgcd de $\delta_{1,n}$ et $\delta_{1,n+1}$, et affaiblir certaines autres hypothèses, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 4.4. *Soient ξ_0, ..., ξ_r des nombres réels, avec $r \geq 1$. Soient $(L_n)_{n\geq 1}$ une suite de formes linéaires, et $(\delta_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers strictement positifs tels que δ_n soit un diviseur commun de $\ell_{1,n}, \ldots, \ell_{r,n}$ pour tout $n \geq 1$. Supposons que $L_n(\underline{\xi}) \neq 0$ pour une infinité de n, et que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(L_n)|L_{n+1}(\underline{\xi})| + H(L_{n+1})|L_n(\underline{\xi})|}{\mathrm{pgcd}(\delta_n, \delta_{n+1})} = 0.$$

Alors on a $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\xi_0, \ldots, \xi_r) \geq 3$.

En particulier, si on suppose $\lim_{n\to\infty} |L_n(\underline{\xi})|^{1/n} = \alpha$ et $\limsup_{n\to\infty} H(L_n)^{1/n} \leq \beta$ avec $0 < \alpha < 1 < \beta$, la proposition 4.4 donne $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\xi_0, \ldots, \xi_r) \geq 3$ dès que $\alpha\beta < \liminf_{n\to\infty}\big(\mathrm{gcd}(\delta_n, \delta_{n+1})\big)^{1/n}$, alors que le critère de Nesterenko ne fournit ce résultat que si $\alpha\beta < 1$.

Avant d'énoncer les applications du théorème 4.2, regroupons quelques remarques.

4.2.2 Remarques sur les preuves

Dans le cas où $\delta_{j,n} = 1$, le théorème 4.2 redonne le critère de Nesterenko rappelé en introduction. Ce résultat est exactement de celui démontré dans [Nes85], à une différence près : Nesterenko suppose seulement $Q_n^{-\tau_1+o(1)} \leq |L_n(\underline{\xi})| \leq Q_n^{-\tau_2+o(1)}$, alors qu'on demande ici $\tau_1 = \tau_2$. Cependant la preuve devrait pouvoir se généraliser sans problèmes au cas où $\tau_1 \neq \tau_2$ (l'important étant d'avoir des bornes, inférieure et supérieure, pour $|L_n(\underline{\xi})|$; connaître sa taille exacte n'est pas indispensable pour faire fonctionner la preuve). De même, on pourrait probablement remplacer $\mathbb{Q}$ par un corps de nombres, puisque le critère de Nesterenko se généralise à ce contexte (voir [Töp94] et [Bed98]). C'est l'absence d'application qui nous a conduits à ne pas traiter le cas le plus général.

La preuve de Nesterenko consiste à minorer la distance de $\underline{\xi} = (\xi_0, \ldots, \xi_r)$ à un sous-espace vectoriel quelconque de $\mathbb{R}^{r+1}$, défini sur $\mathbb{Q}$, de dimension $t < \tau + 1$. Il procède par récurrence sur t. Colmez a rédigé différemment [Col03] (à partir de notes d'Amoroso) la preuve de Nesterenko. Supposons pour simplifier que $\xi_0, \ldots, \xi_r$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Pour tout entier n_0 assez grand, on construit par récurrence sur $j \in \{1, \ldots, r\}$ une suite décroissante $n_0 > n_1 > \cdots > n_r$ d'entiers tels que le déterminant Δ de la matrice

$[\ell_{i,n_j}]_{0\le i,j\le r}$ soit non nul. Le cas favorable est celui où $n_0, \ldots, n_r$ ont en gros la même taille (par exemple, si ils sont consécutifs). Alors en remplaçant la première ligne par la combinaison linéaire des lignes dont les coefficients sont $\xi_0, \ldots, \xi_r$ on obtient $|\Delta| \le Q_n^{r-\tau+o(1)}$. Etant donné que Δ est un entier non nul, cela donne $r \ge \tau$ et la preuve est terminée dans ce cas. La partie difficile de la preuve est de construire $n_0 > n_1 > \cdots > n_r$ avec un certain contrôle sur ces entiers. Dans la version d'Amoroso–Colmez de la preuve de Nesterenko, cette suite est construite mais il peut y avoir un grand écart entre n_j et n_{j+1}. Il serait intéressant de savoir si il existe une telle suite avec n_r essentiellement de la même taille que n_0 ; cela permettrait notamment de remplacer essentiellement les hypothèses peu naturelles 1 et 2 du théorème 4.2 par : $\delta_{i,n}$ divise $\delta_{i,n+1}$. Lorsque $r = 1$ on parvient à montrer que pour une infinité de n_0 on a $\Delta \ne 0$ avec $n_1 = n_0 - 1$; c'est ainsi qu'on démontre la proposition 4.4. Cette méthode différente est la raison pour laquelle les hypothèses de la proposition 4.4 sont beaucoup moins draconiennes que celles du théorème 4.2 (notamment il n'est pas nécessaire d'avoir une minoration de $|L_n(\underline{\xi})|$, ni un comportement géométrique). Cette stratégie de preuve rappelle celle des éléments minimaux successifs de Davenport et Schmidt (voir notamment [DS67] et [DS69]) utilisée pour étudier l'approximation simultanée d'un nombre réel et de son carré (voir §1).

Enfin, même si la proposition 4.4 laisse espérer qu'on puisse affaiblir les hypothèses 1 et 2 du théorème 4.2, la conclusion $s \ge \tau + \gamma_1 + \cdots + \gamma_s$ est probablement optimale : c'est ce que suggèrent l'argument de déterminant ci-dessus et, quand $s = 1$, les résultats des paragraphes 3.2 et 3.3.

4.2.3 Applications

Voici quelques résultats obtenus en reprenant des constructions existantes, auxquelles on applique le théorème 4.2 au lieu de critère de Nesterenko. Concernant les valeurs de la fonction ζ de Riemann aux entiers impairs, le résultat suivant améliore les majorations $i_1 \le 145$ et $i_2 \le 1971$ du théorème 0.3 de [Zud02].

Théorème 4.5. *Il existe des entiers impairs $i_1 \le 139$ et $i_2 \le 1961$ tels que 1, $\zeta(3)$, $\zeta(i_1)$ et $\zeta(i_2)$ soient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.*

Cependant le théorème 4.2 appliqué à la constuction de [BR01] et [Riv00] donne

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}\big(1, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(a)\big) \ge \frac{1+o(1)}{1+\log 2} \log a,$$

c'est-à-dire exactement le même résultat que le critère de Nesterenko. En effet, γ_1, ..., γ_s s'avèrent être très petits et l'amélioration se situe à l'intérieur du terme d'erreur. Si on veut améliorer cette minoration diophantienne, une nouvelle construction de formes linéaires semble donc nécessaire.

On peut aussi considérer le q-analogue de la fonction zêta de Riemann défini par $\zeta_q(\ell) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\ell-1}q^k}{1-q^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{\ell-1}(k) q^k$, où q est l'inverse d'un entier autre que ± 1 et

$\sigma_{\ell-1}(k) = \sum_{d|k} d^{\ell-1}$. Dans ce contexte, on connaît la transcendance de $\zeta_q(\ell)$ pour $\ell \geq 2$ pair, et l'irrationalité de $\zeta_q(1)$. Les méthodes de [BR01] et [Riv00] ont été adaptées par Krattenthaler, Rivoal et Zudilin [KRZ06]. Leurs résultats ont été raffinés grâce à un analogue de la conjecture des dénominateurs par Jouhet et Mosaki, qui ont démontré [JM] le résultat suivant avec des bornes légèrement moins précises sur i_1, i_2 et i_3.

Théorème 4.6. *Il existe des entiers impairs $3 \leq i_0 < i_1 < i_2 < i_3$, avec $i_0 \leq 9$, $i_1 \leq 37$, $i_2 \leq 83$, $i_3 \leq 145$, tels que les nombres 1, $\zeta_q(i_0)$, $\zeta_q(i_1)$, $\zeta_q(i_2)$ et $\zeta_q(i_3)$ soient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.*

5 Un lemme de zéros lié à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

Cette partie est consacrée à un lemme de zéros [1] dont la motivation provient de la conjecture d'indépendance algébrique des logarithmes de nombres algébriques (voir par exemple le chapitre 3 de [Lan66]). Notons $\mathbb{L} = \{\lambda \in \mathbb{C}\,,\ \exp(\lambda) \in \overline{\mathbb{Q}}^*\}$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel des logarithmes de nombres algébriques. Cette conjecture prévoit que des éléments de $\mathbb{L}$ sont algébriquement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$ si, et seulement si, ils sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Géométriquement, cela signifie que si $X \subsetneq \mathbb{C}^n$ est un fermé de Zariski défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ alors tout point $x \in X \cap \mathbb{L}^n$ appartient à un hyperplan de $\mathbb{C}^n$ défini sur $\mathbb{Q}$; Roy a proposé [Roy95] une conjecture équivalente qui décrit plus précisément les points de $X \cap \mathbb{L}^n$.

On ne sait rien dire en général sur ces points ; certains résultats sont connus pour des variétés X particulières (voir [19] pour des références et plus de détails). Ils sont souvent obtenus par application d'un théorème de transcendance déjà connu, comme le théorème du sous-groupe linéaire (i.e. le théorème 2.1 de [Wal81]) ; c'est notamment le cas des résultats démontrés dans [19]. Or on sait (voir la proposition 2 de [Roy]) que le théorème du sous-groupe linéaire ne peut pas suffire à démontrer (algébriquement) la conjecture d'indépendance algébrique des logarithmes. Il serait donc très intéressant d'arriver à appliquer les techniques de transcendance directement sur la variété X.

Une étape importante dans cette direction a été franchie par Roy [Roy95]. Il propose une construction générale de fonction auxiliaire sur une variété X qui pourrait permettre d'obtenir des résultats sur les points de $X \cap \mathbb{L}^n$. Le cas de la grassmannienne est particulièrement motivant, car dans ce cas la construction est non triviale. Soient k et m des entiers tels que $m \geq k+2 \geq 4$; on note $n = \binom{m}{k}$ et X le cône affine au-dessus de la grassmannienne $G(k, \mathbb{C}^m)$, plongé dans $\mathbb{C}^n$ grâce au choix d'une base de $\Lambda^k \mathbb{Q}^m$ définie sur $\mathbb{Q}$. Supposons qu'il existe un point $x = v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \in X \cap \mathbb{L}^n$ dont les n coordonnées sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Soit N un entier assez grand. On note $S_N \subset X \cap \mathbb{L}^n$ l'ensemble fini formé par les points $(\Lambda^k A)(x) = Av_1 \wedge \ldots \wedge Av_k$ pour $A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$ ayant des coefficients entiers compris entre 0 et N. Dans la partie 4 de [Roy95], Roy construit un polynôme $P_N \in \mathbb{Z}[Y_1, \ldots, Y_n]$ non nul, de degré majoré par une puissance explicite de N, tel que $P_N(\exp(x_1), \ldots, \exp(x_n)) = 0$ pour tout point $(x_1, \ldots, x_n) \in S_N$. Il démontre que si $m \geq k(k+2)$ cette construction est non triviale, au sens où il y a plus de contraintes sur P_N que de coefficients : l'algèbre linéaire ne permet pas de construire directement un tel polynôme par résolution d'un système linéaire. Pour conclure cette preuve de transcendance, il manque seulement un lemme de zéros qui dirait qu'un tel polynôme ne peut pas exister. Mais les résultats classiques dans cette direction (par exemple ceux de [Phi86b]) ne concernent que des groupes algébriques commutatifs, et leur généralisation aux groupes non commutatifs (voir [Nak95]) est tellement loin d'être optimale qu'on ne peut pas raisonnablement espérer l'appliquer ici. Dans une situation analogue à celle de la grassmannienne, mais en petite dimension, on peut cependant obtenir un lemme de zéros qui correspond à celui que requiert la construction de Roy. Cette situation fait intervenir $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ au lieu de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$, et $\mathbb{C}^2$ au lieu de $\mathbb{C}^n$; aucune construction de fonction auxiliaire n'étant connue dans ce cas, on n'en déduit pas de résultat diophantien. D'ailleurs dans le cas où X est la grassmannienne, Roy a déjà démontré [Roy95], si $(k,m) \neq (2,4)$, que tout point $x \in X \cap \mathbb{L}^n$ appartient à un hyperplan défini sur $\mathbb{Q}$: le lemme de zéros dans ce cadre donnerait seulement une nouvelle preuve, plus motivante, de ce résultat.

On s'intéresse donc à la situation suivante : on note $\mathbb{G}_m = \mathbb{C}^*$ le groupe multiplicatif, et pour $M = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $P = (x,y) \in \mathbb{G}_m^2$ on pose

$$M \cdot P = (x^a y^b, x^c y^d).$$

Cela définit une action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{G}_m^2$. Lorsque M est à coefficients positifs (ce qui sera toujours le cas ci-dessous), on peut étendre cette définition à tout point $P \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ sauf $(\infty, 0)$ et $(0, \infty)$.

Notons $\Gamma[N]$ l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ à coefficients entiers compris entre 0 et N, et $T[N]$ l'ensemble des $M = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \Gamma[N]$ pour lesquelles $a, b, c, d > 0$ et les entiers b et d sont maximaux parmi les couples (b,d) tels que $ad - bc = 1$ et $1 \leq b, d \leq N$. Il est clair que $T[N]$ est en bijection avec l'ensemble des couples (a,c) tels que $1 \leq a, c \leq N$ et $\mathrm{pgcd}(a,c) = 1$; en utilisant ce fait, et on comptant pour chaque couple (a,c) le nombre de couples (b,d) tels que $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \Gamma[N]$, on obtient lorsque $N \to \infty$:

$$\Big(\frac{6}{\pi^2} + o(1)\Big) N^2 = \mathrm{Card}\, T[N] \leq \mathrm{Card}\, \Gamma[N] \leq \Big(\frac{18}{\pi^2} + o(1)\Big) N^2, \tag{5.1}$$

la première égalité étant classique.

On a alors le résultat suivant :

Théorème 5.1. *Pour tout $N \geq 1$ il existe un ensemble fini $\Sigma_N \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \backslash \{(\infty, 0), (0, \infty)\}$ ayant la propriété suivante. Soit $P \in \mathbb{C}[X_0, X_1, Y_0, Y_1]$ un polynôme bi-homogène de degré d_1 en (X_0, X_1) et d_2 en (Y_0, Y_1), qui s'annule en tous les points de $T[N] \cdot x$ avec $x \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \backslash \{(\infty, 0), (0, \infty)\}$ et $x \notin \Sigma_N$. Alors on a*

$$d_1 + d_2 \geq \frac{\mathrm{Card}\,(T[N] \cdot x)}{N+1}. \tag{5.2}$$

En outre, si P s'annule avec multiplicité au moins M en chaque point de $T[N] \cdot x$ alors $d_1 + d_2 \geq \frac{M \mathrm{Card}\,(T[N] \cdot x)}{N+1}$.

Hormis l'action considérée (celle de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{C}^2$ au lieu de celle de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$ sur $\Lambda^k\mathbb{C}^m$) et l'ensemble fini d'exceptions Σ_N (qui vient de la preuve, voir ci-dessous), il s'agit exactement pour $d_1 = d_2$ et $M = 1$ du lemme de zéros adéquat pour conclure la preuve initiée par Roy. Le fait qu'on fasse intervenir $T[N]$ au lieu de $\Gamma[N]$ (qui serait l'analogue naturel) ne fait perdre, pour N grand, qu'une constante multiplicative au vu de (5.1).

Ce lemme de zéros est optimal (à constante multiplicative près) lorsque $d_1 = d_2 = d$. En effet, si $\mathrm{Card}\,(T[N] \cdot x) = \mathrm{Card}\,T[N]$, en utilisant (5.1) la minoration du théorème 5.1 donne $d \geq \left(\frac{3}{\pi^2} + o(1)\right)MN$ alors que l'algèbre linéaire permet de construire (trivialement) un tel polynôme P dès que $d \geq \left(\frac{\sqrt{6}}{\pi} + o(1)\right)MN$.

La preuve du théorème 5.1 utilise la méthode de dégénérescence en géométrie algébrique. Il s'agit de faire varier le point x. Lorsque $x = (1,t)$ ou $x = (t,1)$ avec $t \in \mathbb{P}^1$, les points de $T[N] \cdot x$ forment essentiellement un réseau : il s'agit (si $t \neq \infty$) de l'ensemble des points (t^i, t^j) avec $1 \leq i,j \leq N$ et $\mathrm{pgcd}(i,j) = 1$. Cette dernière condition peut être omise sans danger réel, car cela ne fait (au plus) que multiplier le nombre de points par $\frac{\pi^2}{6} + o(1)$ quand $N \to \infty$. Les polynômes $\prod_{i=1}^N (X - t^i)$ et $\prod_{j=1}^N (Y - t^j)$ s'annulent sur ce réseau, et permettent d'en minorer la constante de Seshadri (ce qui équivaut à un lemme de zéros pour cet ensemble de points) : on obtient $\varepsilon(T[N] \cdot x, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(1,1)) > \frac{1}{N+1}$. Informellement, l'argument crucial de dégénérescence est le suivant : lorsqu'un ensemble de points (ici $T[N] \cdot x$) varie en fonction d'un paramètre (ici $x \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \backslash \{(\infty,0),(0,\infty)\}$), toute minoration (au sens strict) de la constante de Seshadri est valable sur un ouvert. Il existe donc un ouvert $U_N \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \backslash \{(\infty,0),(0,\infty)\}$, qui contient $\{1\} \times \mathbb{P}^1 \cup \mathbb{P}^1 \times \{1\}$, tel que $\varepsilon(T[N] \cdot x, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(1,1)) > \frac{1}{N+1}$ pour tout $x \in U_N$. Comme le diviseur $\{1\} \times \mathbb{P}^1 \cup \mathbb{P}^1 \times \{1\}$ est ample, le complémentaire Σ_N de U_N est un ensemble fini de points. Il semble possible que $\Sigma_N = \emptyset$ convienne dans le théorème 5.1, mais la méthode de dégénérescence conduit toujours à la présence possible d'exceptions. Cependant, dans une application éventuelle en transcendance, il pourrait être possible de contourner ce problème, par exemple en changeant le point $x \in X \cap \mathbb{L}^n$ pour éviter Σ_N ; dans cette direction il semble possible de majorer explicitement le cardinal de Σ_N en fonction de N.

Perspectives

L'étude de l'exposant $\beta_0(\xi)$ présentée au chapitre 1 devrait être utile pour étudier l'exposant plus naturel $\beta_1(\xi)$ (défini au paragraphe 1.3). Il faudrait combiner les résultats présentés ici avec la construction par Roy [Roy07] d'une famille de nombres réels ξ, obtenus à partir du mot de Fibonacci et d'un raffinement arithmétique, pour lesquels $\beta_1(\xi)$ parcourt un ensemble de valeurs dense dans $[\gamma, 2]$, où $\gamma = (1 + \sqrt{5})/2$. Il est probable que cette construction se généralise au cas d'un mot quelconque à préfixes palindromes abondants, mais il n'est pas du tout évident de savoir si toutes les valeurs inférieures à 2 prises par l'exposant $\beta_1(\xi)$ s'obtiennent ainsi. Par ailleurs, l'exposant $\beta_1(\xi)$ a été relié par Jarník [Jar38] au problème dual consistant à trouver des polynômes de degré 2 petits en ξ ; il serait intéressant de savoir si $\beta_0(\xi)$ y est aussi relié, ou bien si il admet un analogue.

Les constructions de formes linéaires en polyzêtas présentées au chapitre 2 font apparaître plusieurs phénomènes de symétrie, qu'il serait intéressant de relier. Il serait notamment agréable de trouver une généralisation simultanée des deux phénomènes décrits aux paragraphes 2.3 et 2.4, avec si possible une preuve dans l'esprit de celle du paragraphe 2.4 (donc plus instructive que celle du paragraphe 2.3). Pour généraliser encore, on pourrait chercher des phénomènes analogues liés à des séries multiples de type hypergéométrique évaluées en des racines de l'unité, et pas seulement en 1, ce qui permettrait d'incorporer les propriétés décrites au paragraphe 2.5. Enfin, une autre piste serait d'étudier les intégrales de Goncharov-Manin [GM04], qui apparaissent comme des périodes de certains motifs de Tate mixtes et dont Brown a donné la forme explicite suivante :

$$\int_{[0,1]^A} \frac{\prod_{j=1}^{A} x_j^{r_j}(1-x_j)^{s_j}\,\mathrm{d}x_j}{\prod_{1\leq i<j\leq A}(1-x_i\cdots x_j)^{t_{i,j}}}$$

avec des entiers $r_j, s_j, t_{i,j} \geq 0$ tels que l'intégrale converge. Par des arguments géométriques, Brown a prouvé une conjecture de Goncharov-Manin qui affirmait que ces intégrales sont toujours des formes linéaires rationnelles en polyzêtas ([Bro06], [Bro09] ; voir aussi [BCS]). Aucun phénomène de symétrie, ni aucune application diophantienne, n'est connu dans ce cadre.

Les résultats d'approximation rationnelle présentés au chapitre 3 ont été généralisés partiellement en plusieurs variables au chapitre 4 ; il serait agréable de compléter cette généralisation en démontrant une réciproque au critère d'indépendance linéaire de Nesterenko, et en affaiblissant les conditions de divisibilité des coefficients dans le raffinement de celui-ci. Ceci permettrait d'exprimer ce raffinement en termes d'exposants d'approximation diophantienne, avec conditions de divisibilité, et d'obtenir finalement un énoncé contenant essentiellement tous les résultats des chapitres 3 et 4. Par ailleurs je suis en train de rédiger une généralisation du critère d'indépendance linéaire de Nesterenko à des formes linéaires qui sont petites en plusieurs points (cette situation apparaissant dans certaines constructions de formes linéaires à partir de problèmes d'approximation de Padé).

La méthode de dégénérescence utilisée au chapitre 5 devrait pouvoir s'appliquer à d'autres situations, menant à de nouveaux lemmes de zéros. Il serait bien sûr appréciable de démontrer un tel énoncé dans une situation où une construction non triviale de fonction auxiliaire est connue, ce qui permettrait de démontrer un résultat diophantien (à condition d'arriver à contrôler l'ensemble d'exceptions). Par ailleurs, il serait intéressant de développer d'autres méthodes de preuves de lemmes de zéros, fondées sur les minorations de constantes de Seshadri et des arguments de géométrie algébrique.

Finalement, je voudrais mentionner ici deux travaux en cours, sur des sujets reliés à ceux présentés dans ce texte.

D'une part, en commun avec Patrice Philippon, je cherche à démontrer des *lemmes de petites valeurs* dans des groupes algébriques commutatifs. Il s'agit de majorer le plus grand des modules des coefficients d'un polynôme P, de degré borné, qui prend des petites valeurs sur un ensemble donné de points : cela contient (lorsque les valeurs sont nulles) les lemmes de zéros. Notre stratégie (que nous avons commencé à mettre en œuvre lorsque le corps de base est un corps de séries formelles) consiste à suivre les preuves de lemmes de zéros, mais évidemment de nombreuses difficultés surgissent. Une notion de distance entre sous-variétés de l'espace projectif (qui existe [Phi86a] lorsque l'une d'elles est un point) serait probablement un bon outil pour traiter ce genre de problèmes.

D'autre part, en commun avec Michel Laurent, j'ai commencé à travailler sur le problème suivant. Soit T un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de dimension $t \in \{1, \ldots, n-1\}$. Pour $1 \leq d \leq n-1$ et $1 \leq s \leq \min(d, t, n-d, n-t)$, notons $\mu_{d,s}(T)$ la borne supérieure de l'ensemble des μ pour lesquels il existe une infinité de sous-espaces vectoriels $V \subset \mathbb{R}^n$ de dimension d, définis sur $\mathbb{Q}$, tels que les s premiers angles canoniques entre V et T soient plus petits que $H(V)^{-\mu}$ (ce qui signifie essentiellement quand $d + t \leq n$ que V et T sont proches, à $H(V)^{-\mu}$ près, d'avoir en commun un sous-espace vectoriel de dimension s). Dans un article fondateur, Schmidt a donné [Sch67] une minoration de $\mu_{d,s}(T)$ en fonction de n, d, s et t ; il a montré qu'elle est optimale lorsque $\min(d, t, n-d, n-t) = 1$. Lorsque $\min(d, t, n-d, n-t) > 1$, la minoration de Schmidt n'a pas été améliorée depuis ; notre objectif serait de l'améliorer jusqu'à obtenir une minoration optimale. Pour certaines valeurs de d, s, t, nous sommes déjà parvenus à raffiner nettement le résultat de Schmidt. Outre son intérêt propre, ce problème est lié au critère d'indépendance linéaire de Nesterenko, et à sa généralisation (en cours de rédaction) à des formes linéaires petites en plusieurs points (en effet, la preuve présentée au chapitre 4 repose sur la minoration optimale de $\mu_{1,1}(T)$ pour un certain sous-espace vectoriel T de dimension $t = 1$).

Références

[Ada07] B. Adamczewski – « Sur l'exposant de densité des nombres algébriques », *International Math. Research Notices* (2007), Article ID 024, 6 pages.

[ADQZ01] J.-P. Allouche, J. L. Davison, M. Queffélec & L. Q. Zamboni – « Transcendence of Sturmian or morphic continued fractions », *J. Number Th.* **91** (2001), no. 1, p. 39–66.

[Apé79] R. Apéry – « Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ », in *Journées Arithmétiques (Luminy, 1978)*, Astérisque, no. 61, 1979, p. 11–13.

[BCS] F. C. S. Brown, S. Carr & L. Schneps – « The algebra of cell-zeta values », preprint arxiv 0910.0122 [math. NT], Compositio Math., à paraître.

[Bed98] E. Bedulev – « On the linear independence of numbers over number fields », *Mat. Zametki [Math. Notes]* **64** (1998), p. 506–517 [440–449].

[Beu79] F. Beukers – « A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ », *Bull. London Math. Soc.* **11** (1979), no. 3, p. 268–272.

[BL05] Y. Bugeaud & M. Laurent – « Exponents of diophantine approximation and Sturmian continued fractions », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **55** (2005), p. 773–804.

[BR01] K. Ball & T. Rivoal – « Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs », *Invent. Math.* **146** (2001), no. 1, p. 193–207.

[Bro06] F. C. S. Brown – « Périodes des espaces des modules $\overline{\mathfrak{m}}_{0,n}$ et valeurs zêta multiples », *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **342** (2006), no. 12, p. 949–954.

[Bro09] — , « Multiple zeta values and periods of moduli spaces $\mathfrak{m}_{0,n}$ », *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **42** (2009), no. 3, p. 371–489.

[Cas99] J. Cassaigne – « Limit values of the recurrence quotient of Sturmian sequences », *Theoret. Comput. Sci.* **218** (1999), p. 3–12.

[Cha] A. Chantanasiri – « On the criteria for linear independence of Nesterenko, Fischler and Zudilin », preprint arxiv 0912.4904 [math.NT], soumis (13 pages).

[Col03] P. Colmez – « Arithmétique de la fonction zêta », in *Journées mathématiques X-UPS 2002*, éditions de l'école Polytechnique, 2003, http ://math.polytechnique.fr/xups/volumes.html, p. 37–164.

[DJP01] X. Droubay, J. Justin & G. Pirillo – « Episturmian words and some constructions of de Luca and Rauzy », *Theoret. Comput. Sci.* **255** (2001), p. 539–553.

[DS67] H. Davenport & W. Schmidt – « Approximation to real numbers by quadratic irrationals », *Acta Arith.* **13** (1967), p. 169–176.

[DS69] — , « Approximation to real numbers by algebraic integers », *Acta Arith.* **15** (1969), p. 393–416.

[Dub90] A. K. Dubitskas – « Approximation of some logarithms of rational numbers by rational fractions of special form », *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.* **2** (1990), p. 69–71.

[GM04] A. Goncharov & Y. Manin – « Multiple zeta motives and moduli spaces $\overline{\mathfrak{m}}_{0,n}$ », *Compos. Math.* **140** (2004), p. 1–14.

[Hat95] M. Hata – « A note on Beukers' integral », *J. Austral. Math. Soc. (Series A)* **58** (1995), p. 143–153.

[Hat00] — , « A new irrationality measure for $\zeta(3)$ », *Acta Arith.* **92** (2000), no. 1, p. 47–57.

[Hof92] M. Hoffman – « Multiple harmonic series », *Pacific J. of Math.* **152** (1992), p. 275–290.

[Jar38] V. Jarník – « Zum Khintchineschen Übertragungssatz », *Trudy Tbilisskogo Math. Inst. im A. M. Razmadze* **3** (1938), p. 193–212.

[JM] F. Jouhet & E. Mosaki – « Irrationalité aux entiers impairs positifs d'un q-analogue de la fonction zêta de Riemann », Intern. Journal of Number Th. **6** (2010), p. 959–988.

[KRZ06] C. Krattenthaler, T. Rivoal & W. Zudilin – « Séries hypergéométriques basiques, q-analogues des valeurs de la fonction zêta et séries d'Eisenstein », *J. Inst. Math. Jussieu* **5** (2006), no. 1, p. 53–79.

[KZ01] M. Kontsevich & D. Zagier – « Periods », in *Mathematics Unlimited - 2001 and beyond*, Springer, 2001, p. 771–808.

[Lan66] S. Lang – *Introduction to transcendental numbers*, Addison-Wesley, 1966.

[Mas83] D. Masser – « Interpolation on group varieties », in *Approximations diophantiennes et nombres transcendants (Luminy, 1982)* (D. Bertrand & M. Waldschmidt, éds.), Progress in Math., no. 31, Birkhäuser, 1983, p. 151–171.

[Nak95] M. Nakamaye – « Multiplicity estimates and the product theorem », *Bull. Soc. Math. France* **123** (1995), no. 2, p. 155–188.

[Nes85] Y. Nesterenko – « On the linear independence of numbers », *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. [Moscow Univ. Math. Bull.]* **40** (1985), no. 1, p. 46–49 [69–74].

[Phi86a] P. Philippon – « Critères pour l'indépendance algébrique », *Publ. Math. I.H.E.S.* **64** (1986), p. 5–52.

[Phi86b] — , « Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs », *Bull. Soc. Math. France* **114** (1986), p. 355–383, errata et addenda, id. 115 (1987), 397–398.

[Rid57] D. Ridout – « Rational approximations to algebraic numbers », *Mathematika* **4** (1957), p. 125–131.

[Riv00] T. Rivoal – « La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs », *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **331** (2000), no. 4, p. 267–270.

[Riv07] — , « Convergents and irrationality measures of logarithms », *Rev. Mat. Iberoamericana* **23** (2007), no. 3, p. 931–952.

[Roy] D. Roy – « Sur la conjecture de Schanuel pour les logarithmes de nombres algébriques », in *Problèmes Diophantiens 1988/89*, Publ. Math. Univ. Paris VI, no. 90.

[Roy95] — , « Points whose coordinates are logarithms of algebraic numbers on algebraic varieties », *Acta Math.* **175** (1995), p. 49–73.

[Roy03a] — , « Approximation simultanée d'un nombre et de son carré », *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **336** (2003), p. 1–6.

[Roy03b] — , « Approximation to real numbers by cubic algebraic integers II », *Annals of Math.* **158** (2003), p. 1081–1087.

[Roy04] — , « Approximation to real numbers by cubic algebraic integers I », *Proc. London Math. Soc.* **88** (2004), p. 42–62.

[Roy07] — , « On two exponents of approximation related to a real number and its square », *Canadian J. Math.* **59** (2007), p. 211–224.

[RV96] G. Rhin & C. Viola – « On a permutation group related to $\zeta(2)$ », *Acta Arith.* **77** (1996), no. 1, p. 23–56.

[RV01] — , « The group structure for $\zeta(3)$ », *Acta Arith.* **97** (2001), no. 3, p. 269–293.

[RZ03] T. Rivoal & W. Zudilin – « Diophantine properties of numbers related to catalan's constant », *Math. Annalen* **326** (2003), no. 4, p. 705–721.

[Sch67] W. Schmidt – « On heights of algebraic subspaces and Diophantine approximations », *Annals of Math.* **85** (1967), p. 430–472.

[Sch80] — , *Diophantine approximation*, Lecture Notes in Math., no. 785, Springer, 1980.

[Sor96] V. Sorokin – « A transcendence measure for π^2 », *Mat. Sbornik [Sb. Math.]* **187** (1996), no. 12, p. 87–120 [1819–1852].

[Sor98] — , « Apéry's theorem », *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. [Moscow Univ. Math. Bull.]* **53** (1998), no. 3, p. 48–53 [48–52].

[Töp94] T. Töpfer – « Über lineare Unabhängigkeit in algebraischen Zahlkörpern », *Results Math.* **25** (1994), no. 1-2, p. 139–152.

[Vas01] D. Vasilyev – « Approximations of zero by linear forms in values of the Riemann zeta-function », *Doklady Nats. Akad. Nauk Belarusi* **45** (2001), no. 5, p. 36–40, en russe ; version étendue en anglais : *On small linear forms for the values of the Riemann zeta-function at odd points*, prépublication no.1 (558), Nat. Acad. Sci. Belarus, Institute Math., Minsk (2001), 14 pages.

[Wal81] M. Waldschmidt – « Transcendance et exponentielles en plusieurs variables », *Invent. Math.* **63** (1981), p. 97–127.

[Wal91] — , « Fonctions auxiliaires et fonctionnelles analytiques I, II », *J. Analyse Math.* **56** (1991), p. 231–254, 255–279.

[Wal00] — , « Valeurs zêta multiples : une introduction », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **12** (2000), no. 2, p. 581–595.

[Zlo02] S. Zlobin – « Integrals expressible as linear forms in generalized polylogarithms », *Mat. Zametki [Math. Notes]* **71** (2002), no. 5, p. 782–787 [711–716].

[Zlo05] — , « Expansion of multiple integrals in linear forms », *Mat. Zametki [Math. Notes]* **77** (2005), no. 5, p. 683–706 [630–652].

[Zud02] W. Zudilin – « Irrationality of values of the Riemann zeta function », *Izvestiya Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. [Izv. Math.]* **66** (2002), no. 3, p. 49–102 [489–542].

Stéphane Fischler
Laboratoire de Mathématiques
Bâtiment 425, Campus d'Orsay
Université Paris-Sud 11
91405 Orsay Cedex, France
`http://www.math.u-psud.fr/~fischler/`