Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
ELSEVIER
J. Math. Pures Appl. 82 (2003) 1369–1394
www.elsevier.com/locate/matpur

Approximants de Padé et séries hypergéométriques équilibrées

S. Fischler [a,*], T. Rivoal [b]

[a] *Département de Mathématiques et Applications, École Normale Supérieure, 45, rue d'Ulm, 75230 Paris cedex 05, France*
[b] *Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, CNRS UMR 6139, Université de Caen BP 5186, 14032 Caen cedex, France*

Reçu le 14 décembre 2002

Résumé

Dans cet article, nous énonçons et résolvons des problèmes d'approximation de Padé nouveaux et très généraux dont les solutions s'expriment à l'aide de séries hypergéométriques : par spécialisation, ces séries permettent de retrouver l'irrationalité de $\zeta(3)$, d'une infinité de $\zeta(2n+1)$, n entier $\geqslant 1$, et essentiellement tous les résultats de cette nature déjà présents dans la littérature. Nous présentons également deux nouvelles applications diophantiennes de notre méthode.

Abstract

In this paper, we present and solve some very general new Padé approximant problems, whose solutions can be expressed with hypergeometric series. These series appear in the proofs of the irrationality of $\zeta(3)$, of infinitely many $\zeta(2n+1)$, and in essentially all results of this kind in the literature. We also prove two new Diophantine results with this method.

Mots-clés : Approximants de Padé ; Séries hypergéométriques ; Approximation diophantienne ; Fonction ζ de Riemann

Keywords: Padé approximants; Hypergeometric series; Diophantine approximation; Riemann ζ function

* Auteur correspondant.
Adresses e-mail : fischler@dma.ens.fr (S. Fischler), rivoal@math.unicaen.fr (T. Rivoal).

0021-7824/$ – see front matter
doi:10.1016/S0021-7824(03)00027-8

1. Introduction

Les démonstrations données par Apéry en 1978 [4] de l'irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ sont apparues initialement comme très mystérieuses. Néanmoins, dans [7] et [8], Beukers est parvenu à les replacer dans le cadre plus connu des approximants de Padé des polylogarithmes, définis (pour $s \geqslant 1$ et $|z| < 1$) par le développement en série entière :

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}.$$

De façon précise, il considère les deux problèmes suivants : déterminer pour tout entier $n \geqslant 0$ des polynômes a, b, c de degré au plus n tels que

$$\begin{cases} S(z) = a(z)\,\mathrm{Li}_2(1/z) + b(z)\,\mathrm{Li}_1(1/z) + c(z) = \mathrm{O}\big(z^{-n-1}\big), \\ R(z) = a(z)\log(z) - b(z) = \mathrm{O}\big((1-z)^{n+1}\big) \end{cases} \tag{1}$$

et des polynômes A, B, C et D de degré au plus n tels que[1] :

$$\begin{cases} U(z) = A(z)\,\mathrm{Li}_2(1/z) + B(z)\,\mathrm{Li}_1(1/z) + C(z) = \mathrm{O}\big(z^{-n-1}\big), \\ V(z) = 2A(z)\,\mathrm{Li}_3(1/z) + B(z)\,\mathrm{Li}_2(1/z) + D(z) = \mathrm{O}\big(z^{-n-1}\big), \\ W(z) = A(z)\log(z) - B(z) = \mathrm{O}(1-z). \end{cases} \tag{2}$$

Remarque. Étant donnée une fonction $F(w)$ développable en série de Laurent $F(w) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n w^n$ au voisinage de $w = 0$ (avec $w = z$, $1/z$ ou $1 - z$ dans la suite), on note $F(w) = \mathrm{O}(w^{N+1})$ si $a_{-m} = a_{-m+1} = \cdots = a_N = 0$. Il s'agit d'une majoration quand z tend vers 0, l'infini ou 1 (suivant la valeur de w).

Les solutions de ces deux problèmes et de ceux qui suivent font intervenir les séries hypergéométriques ${}_{q+1}F_q$ définies (pour $q \geqslant 1$) par :

$${}_{q+1}F_q\left(\begin{matrix}\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_q \\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_q\end{matrix}\,\middle|\, z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_0)_k(\alpha_1)_k\cdots(\alpha_q)_k}{(1)_k(\beta_1)_k\cdots(\beta_q)_k} z^k,$$

où les α_j, β_j et z sont des complexes convenables, et $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$ est le symbole de Pochhammer. Dans les ouvrages traitant de ces fonctions (par exemple [3]), on trouve les définitions suivantes :

- ${}_{q+1}F_q$ est *quasi équilibrée* si $\alpha_1 + \beta_1 = \cdots = \alpha_q + \beta_q$;
- ${}_{q+1}F_q$ est *bien équilibrée* si $\alpha_0 + 1 = \alpha_1 + \beta_1 = \cdots = \alpha_q + \beta_q$;
- ${}_{q+1}F_q$ est *très bien équilibrée* si elle est bien équilibrée et $\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_0 + 1$.

[1] Beukers n'énonce pas la condition sur $W(z)$ mais la condition équivalente $B(1) = 0$.

Dans [7], Beukers indique que la solution de (1) est unique (à une constante multiplicative près), donnée par une certaine intégrale que l'on transforme facilement en la série quasi équilibrée suivante[2] :

$$S(z) = n! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-n)_n}{(k)_{n+1}^2} z^{-k} \tag{3}$$

$$= z^{-n-1} \frac{n!^4}{(2n+1)!^2} {}_3F_2\left(\begin{matrix} n+1, & n+1, & n+1 \\ & 2n+2, & 2n+2 \end{matrix} \,\middle|\, z^{-1}\right). \tag{4}$$

Remarque. La série (3) n'est pas sous forme hypergéométrique. On passe à la forme (4) en appliquant des formules telles que $(\alpha)_k = \frac{k!}{(\alpha-1)!}(k+1)_{\alpha-1}$ (pour $\alpha \geqslant 1$ et $k \geqslant 0$). Cette remarque s'applique à toutes les séries ci-dessous.

Beukers montre aussi [8] que (2) a une solution unique (à une constante multiplicative près) et son argument donne immédiatement :

$$U(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-n)_n^2}{(k)_{n+1}^2} z^{-k} \tag{5}$$

$$= z^{-n-1} \frac{n!^4}{(2n+1)!^2} {}_4F_3\left(\begin{matrix} n+1, & n+1, & n+1, & n+1 \\ & 1, & 2n+2, & 2n+2 \end{matrix} \,\middle|\, z^{-1}\right) \tag{6}$$

et

$$V(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(\frac{(k-n)_n^2}{(k)_{n+1}^2}\right) z^{-k}. \tag{7}$$

Armé de ces solutions explicites, on peut déduire les théorèmes d'Apéry (voir par exemple [6,15]). Plus récemment, en cherchant une démonstration élémentaire de l'irrationalité de $\zeta(3)$, K. Ball a introduit la série :

$$B_n = n!^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(k + \frac{n}{2}\right) \frac{(k-n)_n (k+n+1)_n}{(k)_{n+1}^4}$$

$$= \frac{n!^7 (3n+2)!}{2(2n+1)!^5} {}_7F_6\left(\begin{matrix} 3n+2, & \frac{3}{2}n+2, & n+1, & \ldots, & n+1 \\ & \frac{3}{2}n+1, & 2n+2, & \ldots, & 2n+2 \end{matrix} \,\middle|\, 1\right)$$

[2] Bien que cela soit un cas particulier du Théorème 1 ci-dessous, nous donnons une démonstration alternative de (4) à la Section 5, en adaptant une technique due à Sorokin [23].

qui vérifie $B_n = \alpha_n \zeta(3) + \beta_n$ pour certains rationnels α_n et β_n, alors que l'on s'attend aussi à voir apparaître $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$. Ce remarquable phénomène est dû à la nature très[3] bien équilibrée de B_n.

Généralisant cette construction, le second auteur de cet article a introduit [19, Chapitre 3] la série bien équilibrée suivante, pour $1 \leqslant r \leqslant a/2$:

$$\begin{aligned} S_{n,a,r}(z) &= n!^{a-2r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-rn)_{rn}(k+n+1)_{rn}}{(k)_{n+1}^{a}} z^{-k} \\ &= z^{-rn-1} n!^{a-2r} \frac{(rn)!^{a+1}((2r+1)n+1)!}{((r+1)n+1)!^{a+1}} \\ &\quad \times {}_{a+2}F_{a+1}\left(\begin{matrix} (2r+1)n+2, & rn+1, & \ldots, & rn+1 \\ & (r+1)n+2, & \ldots, & (r+1)n+2 \end{matrix} \,\middle|\, z^{-1} \right) \end{aligned}$$

qui se décompose elle aussi en polylogarithmes et permet de prouver qu'une infinité des nombres $\zeta(2j+1)$ sont irrationnels (voir également [18,5]).

Pour montrer des résultats d'indépendance linéaire de valeurs de polylogarithmes aux rationnels, la série quasi équilibrée suivante (avec $1 \leqslant r \leqslant a$), qui généralise à la fois (4) et une construction de Nikishin [16], est également introduite dans [19, Chapitre 2] :

$$\begin{aligned} N_{n,a,r}(z) &= n!^{a-r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-rn)_{rn}}{(k)_{n+1}^{a}} z^{-k} = z^{-rn-1} n!^{a-r} \frac{(rn)!^{a+1}}{((r+1)n+1)!^{a}} \\ &\quad \times {}_{a+1}F_{a}\left(\begin{matrix} rn+1, & rn+1, & \ldots, & rn+1 \\ & (r+1)n+2, & \ldots, & (r+1)n+2 \end{matrix} \,\middle|\, z^{-1} \right). \end{aligned}$$

À la page 53 de [19], est posée la question d'expliciter si possible des problèmes de Padé tels que (1) et (2) dont la solution ferait intervenir ces trois types de séries hypergéométriques. Dans cet article, nous répondons positivement à cette question en construisant et en résolvant des problèmes de Padé très généraux, sur lesquels se lisent en outre les propriétés de réciprocité des solutions dans le cas bien équilibré. Commençons par décrire le cas des séries quasi et bien équilibrées.

Considérons des entiers $n \geqslant 0$, $a \geqslant 1$ et $\rho, \sigma \geqslant 0$ vérifiant $\rho + \sigma \leqslant a(n+1) - 1$ et que nous supposons fixés. Nous voulons déterminer des polynômes P_0, $\overline{P}_0$ et P_j (pour $1 \leqslant j \leqslant a$) de degré au plus n et des fonctions S, $\overline{S}$, R (qui dépendent de n, a, ρ, σ) tels que

[3] La disparition de la moitié des valeurs de ζ attendues est en fait liée seulement à l'aspect bien équilibré de la série.

$$\begin{cases} S(z) = P_0(z) + \displaystyle\sum_{j=1}^{a} P_j(z)\,\mathrm{Li}_j(1/z) = \mathrm{O}\big(z^{-\rho-1}\big), \\ \overline{S}(z) = \overline{P}_0(z) + \displaystyle\sum_{j=1}^{a} (-1)^j P_j(z)\,\mathrm{Li}_j(z) = \mathrm{O}\big(z^{n+\sigma+1}\big), \\ R(z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{a} (-1)^{j-1} P_j(z) \frac{\log^{j-1}(z)}{(j-1)!} = \mathrm{O}\big((1-z)^{a(n+1)-\rho-\sigma-1}\big). \end{cases} \tag{8}$$

(Ici et dans toute la suite, la fonction $\log(z)$ est définie avec sa détermination principale.)

En fait, le problème est de trouver les polynômes $P_1, \ldots, P_a$. En effet, quand ceux-ci sont fixés, il existe au plus un choix pour P_0, $\overline{P}_0$, S, $\overline{S}$ et R. De plus, comme $\mathrm{Li}_j(0) = 0$ pour tout $j \geqslant 1$, on aura automatiquement $\deg(P_0) \leqslant n-1$ et $\overline{P}_0(0) = 0$.

Remarque. Tous les problèmes de Padé de cet article se traduisent par un système d'équations linéaires dont les inconnues sont les coefficients des polynômes. Il y aura toujours une inconnue de plus que d'équations, ce qui implique l'existence d'au moins une solution non identiquement nulle. Nous montrerons que la matrice du système est de rang maximal, c'est-à-dire que la solution du problème est unique à une constante multiplicative près, ce qui sera le sens de l'expression "unicité" dans ce texte.

Théorème 1. *À constante multiplicative près, le problème de Padé* (8) *a une unique solution, et elle vérifie pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geqslant 1$,*

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-\rho)_\rho (k+n+1)_\sigma}{(k)_{n+1}^a} z^{-k}, \tag{9}$$

$$P_a(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{ka} \frac{(-k-\rho)_\rho (n-k+1)_\sigma}{k!^a (n-k)!^a} z^k \tag{10}$$

et, si $z \notin \,]-\infty, 0]$,

$$R(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{(s-\rho)_\rho (s+n+1)_\sigma}{(s)_{n+1}^a} z^{-s}\,\mathrm{d}s, \tag{11}$$

où $\mathcal{C}$ est un lacet entourant les points $-n, -n+1, \ldots, 0$ dans le sens direct.

Ce résultat concerne des séries quasi équilibrées ; dans le cas particulier $\rho = \sigma$ elles sont bien équilibrées. En effet, on peut écrire (9) sous la forme :

$$S(z) = z^{-\rho-1} \frac{\rho!^{a+1} (\rho+\sigma+n+1)!}{(\rho+n+1)!^{a+1}} \times {}_{a+2}F_{a+1}\left(\begin{matrix} \rho+\sigma+n+2, & \rho+1, & \ldots, & \rho+1 \\ & \rho+n+2, & \ldots, & \rho+n+2 \end{matrix} \,\middle|\, z^{-1} \right).$$

Remarque. On peut démontrer [13] ce théorème en calculant les exposants de l'équation différentielle associée. Mais dans la suite on utilise une méthode complètement différente.

Proposition 1. *Pour chaque couple* (ρ,σ), *notons* $(P_{j,\rho,\sigma}(z))_{1\leqslant j\leqslant a}$ *la solution du problème* (8) *associé à* (n,a,ρ,σ) *qui vérifie la normalisation* (10), *et* $S_{\rho,\sigma}(z)$, $\overline{S}_{\rho,\sigma}(z)$, $R_{\rho,\sigma}(z)$ *les quantités correspondantes. On a alors* :

$$
\begin{aligned}
&z^n P_{j,\sigma,\rho}(1/z) = (-1)^{a(n+1)+\rho+\sigma+j} P_{j,\rho,\sigma}(z) \quad \textit{pour } j \in \{1,\dots,a\},\\
&z^n \overline{S}_{\sigma,\rho}(1/z) = (-1)^{a(n+1)+\rho+\sigma} S_{\rho,\sigma}(z),\\
&z^n R_{\sigma,\rho}(1/z) = (-1)^{a(n+1)+\rho+\sigma+1} R_{\rho,\sigma}(z).
\end{aligned}
$$

En particulier quand $\sigma=\rho$, *on a pour* $j\in\{1,\dots,a\}$:

$$
z^n P_{j,\rho,\rho}(1/z) = (-1)^{a(n+1)+j} P_{j,\rho,\rho}(z) \quad \textit{et} \quad z^n \overline{S}_{\rho,\rho}(1/z) = (-1)^{a(n+1)} S_{\rho,\rho}(z).
$$

Remarque. Cette proposition affirme que si $a(n+1)+j$ est impair alors $P_{j,\rho,\rho}(1)$ est nul. Donc quand $a(n+1)$ est impair, respectivement pair, $S_{\rho,\rho}(1)$ est une forme linéaire à coefficients rationnels en 1, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, ..., $\zeta(a)$, respectivement 1, $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, ..., $\zeta(2[a/2])$: c'est ce qui apparaît dans [18,5]. Le cas le plus simple, dont nous n'avons pas trouvé mention dans la littérature, présentant une telle dichotomie correspond à $\rho=0$:

$$
S_{0,0}(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k)_{n+1}^a}.
$$

Démonstration de la Proposition 1. En changeant z en $1/z$ on voit que la famille $((-1)^j z^n P_{j,\sigma,\rho}(1/z))_{1\leqslant j\leqslant a}$ est solution du problème (8) associé à (n,a,ρ,σ), et les fonctions associées sont $z^n\overline{S}_{\sigma,\rho}(1/z)$, $z^n S_{\sigma,\rho}(1/z)$ et $-z^n R_{\sigma,\rho}(1/z)$. D'après le Théorème 1, cette solution est proportionnelle à $(P_{j,\rho,\sigma}(z))_{1\leqslant j\leqslant a}$. Le coefficient de proportionnalité s'obtient à l'aide de (10) et de l'identité triviale $(\alpha)_k = (-1)^k(-\alpha-k+1)_k$. □

Une conséquence de ces considérations est donnée par les deux théorèmes suivants :

Théorème 2. *Soient* λ, μ *deux réels et* α *un rationnel tels que* $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ *et* $0<\alpha<1$. *L'ensemble*

$$
\left\{\lambda\,\mathrm{Li}_s(\alpha) + \mu\frac{\log^s(\alpha)}{(s-1)!},\ s\in\mathbb{N}^*\right\}
$$

contient une infinité de nombres linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Quand $\lambda\neq 0$, on peut supposer $\lambda=1$ dans l'énoncé de ce théorème. Lorsque $\mu=0$, on retrouve le théorème démontré au Chapitre 2 de [19]. Pour $\lambda=0$, on en déduit la transcendance de $\log(\alpha)$ et dans ce cas, la méthode est essentiellement celle utilisée par Reyssat [17] pour obtenir une mesure de transcendance de $\log(\alpha)$. Notre résultat n'apporte malheureusement aucun éclairage sur l'éventuelle indépendance linéaire de $\mathrm{Li}_s(\alpha)$ et $\log^s(\alpha)$ pour tout entier $s \geqslant 2$. En effet, la conclusion reste vraie si pour tout entier $s \geqslant 2$ et tout rationnel $0 < \alpha < 1$, il existe des rationnels $c_s(\alpha)$ et $d_s(\alpha)$ tels que $\mathrm{Li}_s(\alpha) = c_s(\alpha)\log^s(\alpha) + d_s(\alpha)$.

Remarque. Le Théorème 2 reste valable pour $-1 \leqslant \alpha < 0$, en choisissant une détermination convenable du logarithme (voir la remarque qui suit la Proposition 2). En utilisant des séries bien équilibrées, et $\alpha = -1$, on obtient un résultat analogue pour l'ensemble des $\lambda\,\mathrm{Li}_s(-1) + \mathrm{i}\mu(\mathrm{i}\pi)^s/(s-1)!$, s entier impair.

Théorème 3. *Au moins l'un des trois nombres*

$$\mathrm{Li}_2(1/2) + \log^2(2), \qquad \mathrm{Li}_3(1/2) - \frac{1}{2}\log^3(2), \qquad \mathrm{Li}_4(1/2) + \frac{1}{6}\log^4(2)$$

est irrationnel.

Remarque. En appliquant la méthode de Hata [12], on pourrait peut-être éliminer $\mathrm{Li}_4(1/2) + \frac{1}{6}\log^4(2)$. Remarquons par ailleurs que $\mathrm{Li}_2(1/2) = \frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{1}{2}\log^2(2)$ et $\mathrm{Li}_3(1/2) = \frac{7}{8}\zeta(3) - \frac{1}{2}\zeta(2)\log(2) + \frac{1}{6}\log^3(2)$ (voir [14]).

La démonstration du Théorème 1 est donnée à la Section 2. Elle se décompose en trois lemmes, chacun traduisant l'une des équations du problème (8). À la Section 3, nous énonçons et résolvons (Théorème 4) un autre problème de Padé permettant de traiter le cas de séries très bien équilibrées. À la Section 4, nous généralisons les Théorèmes 1 et 4 de manière à englober les problèmes du type (2) : on obtient ainsi les Théorèmes 5 et 6. À la Section 5, nous donnons une solution alternative au problème de Padé (1), sans passer par le Théorème 1. Enfin, aux Sections 6 et 7, nous démontrons les Théorèmes 2 et 3.

2. Séries quasi et bien équilibrées

Démonstration du Théorème 1. Il est plus commode de chercher à résoudre le problème équivalent :

$$\begin{cases} S(z) = P_0(z) + \displaystyle\sum_{j=1}^{a} P_j(z)\,\mathrm{Li}_j(1/z) = \mathrm{O}\big(z^{-\rho-1}\big), \\ \widetilde{S}(z) = z^n\,\overline{P_0}(1/z) + \displaystyle\sum_{j=1}^{a}(-1)^j z^n P_j(1/z)\,\mathrm{Li}_j(1/z) = \mathrm{O}\big(z^{-\sigma-1}\big), \\ R(z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{a}(-1)^{j-1}P_j(z)\frac{\log^{j-1}(z)}{(j-1)!} = \mathrm{O}\big((1-z)^{a(n+1)-\rho-\sigma-1}\big), \end{cases} \tag{12}$$

avec $\widetilde{S}(z) = z^n\,\overline{S}(1/z)$.

Fixons les notations suivantes, dans lesquelles on ne présage pas du fait que les P_j forment une solution. Pour $j \in \{1, \dots, a\}$ on écrit :

$$P_j(z) = \sum_{t=0}^{n} p_{j,t} z^t.$$

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{a} P_j(z) \operatorname{Li}_j(1/z) &= \sum_{j=1}^{a} \sum_{t=0}^{n} p_{j,t} \sum_{m \geqslant 1} \frac{z^{-(m-t)}}{m^j} \\ &= \sum_{k=1-n}^{+\infty} z^{-k} \sum_{j=1}^{a} \sum_{t=\max(0,1-k)}^{n} \frac{p_{j,t}}{(t+k)^j}. \end{aligned} \tag{13}$$

Pour $k \geqslant 1$, le coefficient de z^{-k} dans cette série est donné par la fraction rationnelle :

$$A(k) = \sum_{j=1}^{a} \sum_{t=0}^{n} \frac{p_{j,t}}{(t+k)^j} \tag{14}$$

en la variable k, qu'on peut aussi écrire sous la forme $Q(k)/(k)_{n+1}^a$ où le polynôme $Q(k)$ est de degré strictement inférieur à $a(n+1)$, car il n'y a pas de partie principale dans l'équation (14). D'après l'unicité de la décomposition en éléments simples, la donnée de $P_1, \dots, P_a$ est équivalente à la donnée du polynôme Q. Les Lemmes 1 à 3 ci-dessous montrent que le seul polynôme Q qui donne une solution de (12) est (à constante multiplicative près) :

$$Q(k) = (k-\rho)_\rho (k+n+1)_\rho.$$

Cela démontre "l'unicité" de la solution et la relation (9). On en déduit facilement (10) en calculant les coefficients $p_{a,t}$ grâce à (14). L'expression de $R(z)$ découle du théorème des résidus appliqué à l'intégrale de (11). □

Lemme 1. *Les polynômes $P_1, \dots, P_a$ satisfont à la première condition du système* (12) (*avec P_0 bien choisi*) *si, et seulement si, le polynôme*

$$\prod_{i=1}^{\rho} (k-i) = (k-\rho)_\rho$$

divise $Q(k)$.

Démonstration. Le coefficient de z^{-k} dans l'équation (13) est nul pour tout $k \in \{1, \dots, \rho\}$ si, et seulement si, A s'annule aux points $1, \dots, \rho$. □

Lemme 2. *Les polynômes $P_1, \dots, P_a$ satisfont à la deuxième condition du système* (12) (*avec $\overline{P_0}$ bien choisi*) *si, et seulement si, le polynôme*

$$\prod_{i=n+1}^{n+\sigma}(k+i) = (k+n+1)_\sigma$$

divise $Q(k)$.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{a}(-1)^j z^n P_j(1/z)\,\mathrm{Li}_j(1/z) &= \sum_{j=1}^{a}(-1)^j\sum_{t=0}^{n}p_{j,n-t}\sum_{m\geqslant 1}\frac{z^{-(m-t)}}{m^j}\\ &= \sum_{k=1-n}^{+\infty}z^{-k}\sum_{j=1}^{a}(-1)^j\sum_{t=\max(0,1-k)}^{n}\frac{p_{j,n-t}}{(t+k)^j}\\ &= \sum_{k=1-n}^{+\infty}z^{-k}\sum_{j=1}^{a}\sum_{\ell=0}^{\min(n,n+k-1)}(-1)^j\frac{p_{j,\ell}}{(n+k-\ell)^j}. \end{aligned} \tag{15}$$

Pour $k \geqslant 1$, le coefficient de z^{-k} dans la série $\widetilde{S}(z)$ est donné par l'équation (15), et vaut $A(-k-n)$. Donc l'existence de $\overline{P_0}$ vérifiant la deuxième condition du système (12) équivaut à l'annulation de A en $-n-1, \dots, -n-\sigma$, ce qui termine la preuve du Lemme 2. □

Lemme 3. *Soit D un entier inférieur ou égal à $a(n+1)-1$. Alors* $\deg(Q) \leqslant D$ *si, et seulement si, quand z tend vers* 1, *on a* :

$$R(z) = \mathrm{O}\big((1-z)^{a(n+1)-D-1}\big).$$

En particulier si $D = a(n+1)-1$ alors les deux assertions sont trivialement vraies. Si $D = a(n+1)-2$ on retrouve une observation qui apparaît dans [8] : A est sans résidu à l'infini si, et seulement si, $P_1(1) = 0$. Pour démontrer le Théorème 1 on utilise ce Lemme avec $D = \rho + \sigma$.

Démonstration du Lemme 3. Dans un premier temps, on traduit la condition $\deg(Q) \leqslant D$. On a :

$$\frac{1}{(k+i)^j} = \sum_{\ell\geqslant 0}\binom{\ell+j-1}{\ell}\frac{(-i)^\ell}{k^{\ell+j}},$$

d'où en posant $d = \ell + j$, le développement asymptotique de $A(k)$ à l'infini :

$$A(k) = \sum_{d\geqslant 1}\frac{\mathfrak{A}_d}{k^d} \tag{16}$$

en notant

$$\mathfrak{A}_d = (-1)^d \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{\min(a,d)} (-1)^j \binom{d-1}{d-j} i^{d-j} p_{j,i}. \tag{17}$$

La condition $\deg(Q) \leqslant D$ se traduit par :

$$\mathfrak{A}_d = 0 \quad \text{pour tout } d \in \{1, \ldots, a(n+1) - D - 1\}.$$

On déduit alors immédiatement le Lemme 3 de la proposition suivante :

Proposition 2. *On a, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$:*

$$R(z) = \sum_{d \geqslant 1} (-1)^{d-1} \mathfrak{A}_d \frac{\log^{d-1}(z)}{(d-1)!}.$$

Remarque. La série du membre de droite converge uniformément en z, sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. En outre, on peut remplacer $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ par n'importe quel ouvert simplement connexe qui contient 1 et pas 0, en prenant sur cet ouvert la détermination du logarithme qui s'annule en 1. Bien entendu, il faut effectuer ce changement à la fois dans (12) (qui définit $R(z)$) et dans la Proposition 2.

Première démonstration de la Proposition 2. Posons $x = \log(z)$. On a :

$$\begin{aligned} R(\mathrm{e}^x) &= \sum_{j=1}^{a} P_j(\mathrm{e}^x)(-1)^{j-1} \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} = \sum_{j=1}^{a} \sum_{t=0}^{n} p_{j,t}\, \mathrm{e}^{tx} (-1)^{j-1} \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} \\ &= \sum_{j=1}^{a} \sum_{t=0}^{n} \sum_{\ell \geqslant 0} p_{j,t} (-1)^{j-1} \frac{t^\ell x^{\ell+j-1}}{(j-1)!\ell!} \\ &= \sum_{d \geqslant 1} \frac{x^{d-1}}{(d-1)!} \left(\sum_{t=0}^{n} \sum_{j=1}^{\min(a,d)} \binom{d-1}{j-1} t^{d-j} p_{j,t} (-1)^{j-1} \right) \\ &= \sum_{d \geqslant 1} (-1)^{d-1} \mathfrak{A}_d \frac{x^{d-1}}{(d-1)!}, \end{aligned}$$

en utilisant la formule (17). □

Deuxième démonstration de la Proposition 2. Un calcul de résidus montre qu'on a :

$$R(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_C A(s) z^{-s}\, \mathrm{d}s, \tag{18}$$

où C désigne le cercle de centre 0 et de rayon $2n$, parcouru dans le sens positif. En posant $u = 1/s$ on obtient :

$$R(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{C'} A(1/u) \exp\left(-\frac{\log(z)}{u}\right) \frac{\mathrm{d}u}{u^2},$$

en notant C' le cercle de centre 0 et de rayon $1/(2n)$, parcouru dans le sens direct. Grâce au développement $A(1/u) = \sum_{d \geqslant 1} \mathfrak{A}_d u^d$, valable quand u parcourt C', on a :

$$R(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \sum_{d \geqslant 1} \sum_{\ell \geqslant 0} (-1)^\ell \frac{\log^\ell(z)}{\ell!} \mathfrak{A}_d \int_{C'} u^{d-\ell-2} \, \mathrm{d}u.$$

Or l'intégrale est nulle sauf quand $d = \ell + 1$, et dans ce cas elle vaut $2\mathrm{i}\pi$. On a donc démontré la Proposition 2. $\square$

Remarque. De la relation (18) on déduit immédiatement que l'ordre d'annulation de $R(z)$ en $z = 1$ est égal à l'ordre d'annulation de $A(k)$ en l'infini, diminué de 1. Ceci démontre le Lemme 3, sans passer par la Proposition 2.

3. Séries très bien équilibrées

Considérons des entiers $n \geqslant 0$, $a \geqslant 1$ et $\rho \geqslant 0$ vérifiant $2\rho \leqslant a(n+1) - 2$ et que nous supposons fixés. Nous désirons maintenant résoudre le problème d'approximation de Padé suivant : déterminer des polynômes P_0, $\overline{P}_0$ et P_j (pour $1 \leqslant j \leqslant a$) de degré au plus n (dépendant aussi de a et ρ) et des fonctions S, $\overline{S}$, R tels que

$$\begin{cases} S(z) = P_0(z) + \displaystyle\sum_{j=1}^{a} P_j(z) \operatorname{Li}_j(1/z) = \mathrm{O}\big(z^{-\rho-1}\big), \\ \overline{S}(z) = \overline{P}_0(z) + \displaystyle\sum_{j=1}^{a} (-1)^j P_j(z) \operatorname{Li}_j(z) = \mathrm{O}\big(z^{n+\rho+1}\big), \\ R(z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{a} (-1)^{j-1} P_j(z) \frac{\log^{j-1}(z)}{(j-1)!} = \mathrm{O}\big((1-z)^{a(n+1)-2\rho-2}\big), \\ P_a\big((-1)^a\big) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Théorème 4. *À une constante multiplicative près, le problème de Padé* (19) *a une solution unique, et elle vérifie*

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(k + \frac{n}{2}\right) \frac{(k-\rho)_\rho (k+n+1)_\rho}{(k)_{n+1}^a} z^{-k} \tag{20}$$

et

$$P_a(z)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{ka}\left(\frac{n}{2}-k\right)\frac{(-k-\rho)_\rho(n-k+1)_\rho}{k!^a(n-k)!^a}z^k. \tag{21}$$

De plus, pour tout $j=1,\ldots,a$*, on a* :

$$z^nP_j(1/z)=(-1)^{a(n+1)+j+1}P_j(z)\quad et\quad z^n\overline{S}(1/z)=(-1)^{a(n+1)+1}S(z). \tag{22}$$

Remarque. On peut écrire (20) comme une série hypergéométrique très bien équilibrée :

$$\begin{aligned}S(z)={}&\frac{1}{2}z^{-\rho-1}\frac{\rho!^{a+1}(2\rho+n+2)!}{(\rho+n+1)!^{a+1}}\\&\times{}_{a+3}F_{a+2}\left(\begin{matrix}2\rho+n+2,& \frac{1}{2}n+\rho+2,& \rho+1,& \ldots,& \rho+1\\ & \frac{1}{2}n+\rho+1,& \rho+n+2,& \ldots,& \rho+n+2\end{matrix}\,\middle|\, z^{-1}\right).\end{aligned}$$

Démonstration. Reprenons les notations de la Section 2. Les Lemmes 1, 2 et 3 montrent que les solutions sont données par

$$S(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Q(k)}{(k)_{n+1}^a}z^{-k},$$

avec un polynôme $Q(k)$ de degré inférieur ou égal à $2\rho+1$ et divisible par $(k-\rho)_\rho(k+n+1)_\rho$. Pour toute solution il existe donc un polynôme $\pi(k)$ de degré au plus 1 tel que

$$Q(k)=\pi(k)(k-\rho)_\rho(k+n+1)_\rho.$$

En développant en éléments simples la fraction rationnelle :

$$\pi(k)\frac{(k-\rho)_\rho(k+n+1)_\rho}{(k)_{n+1}^a},$$

on voit que

$$\begin{aligned}P_a(z)&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{ka}\pi(-k)\frac{(-k-\rho)_\rho(n-k+1)_\rho}{k!^a(n-k)!^a}z^k\\&=(-1)^\rho\sum_{k=0}^{n}(-1)^{ka}\pi(-k)\frac{(k+1)_\rho(n-k+1)_\rho}{k!^a(n-k)!^a}z^k.\end{aligned}$$

Sur cette formule, il est clair que si $\pi(k)=1$ pour tout k alors $P_a((-1)^a)\neq 0$ (car c'est une somme de termes non nuls du même signe), et que si $\pi(k)=k+n/2$ alors

$P_a((-1)^a) = 0$ (car le changement de k en $n-k$ change $P_a((-1)^a)$ en son opposé). Dans le cas général, on peut écrire $\pi(k) = \alpha + \beta(k + n/2)$. La condition $P_a((-1)^a) = 0$ se traduit alors par $\alpha = 0$: on a démontré que le problème (19) a une solution unique (à constante multiplicative près), et qu'elle vérifie (20) et (21). On en déduit (22) comme dans la preuve de la Proposition 1. □

4. Généralisations

Nous considérons maintenant deux problèmes de Padé qui englobent le problème (2) et font intervenir des séries "dérivées" telles que (7). Considérons des entiers $n \geqslant 0$, $a \geqslant 1$, $L, M \geqslant 0$ et $\rho, \sigma \geqslant 0$ vérifiant $L\rho + M\sigma \leqslant a(n+1) - 1$ et que nous supposons fixés. Nous voulons déterminer des polynômes $P_{0,\ell}$, $\overline{P}_{0,m}$, P_j (pour $0 \leqslant \ell \leqslant L-1$, $0 \leqslant m \leqslant M-1$ et $1 \leqslant j \leqslant a$) de degré au plus n et des fonctions S_ℓ, $\overline{S}_m$ et R (qui dépendent aussi de ρ, σ, L, M, a, n) tels que l'on ait les $M + L + 1$ conditions simultanées pour $\ell = 0, \ldots, L-1$ et $m = 0, \ldots, M-1$:

$$\begin{cases} S_\ell(z) = P_{0,\ell}(z) + \displaystyle\sum_{j=1}^{a} \binom{\ell + j - 1}{j-1} P_j(z)\,\mathrm{Li}_{\ell+j}(1/z) = \mathrm{O}\big(z^{-\rho-1}\big), \\ \overline{S}_m(z) = \overline{P}_{0,m}(z) + \displaystyle\sum_{j=1}^{a} (-1)^j \binom{m + j - 1}{j-1} P_j(z)\,\mathrm{Li}_{m+j}(z) = \mathrm{O}\big(z^{n+\sigma+1}\big), \\ R(z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{a} (-1)^{j-1} P_j(z) \frac{\log^{j-1}(z)}{(j-1)!} = \mathrm{O}\big((1-z)^{a(n+1)-L\rho-M\sigma-1}\big). \end{cases} \tag{23}$$

Les entiers a et n étant fixés, on note $S_\ell(z) = S_\ell\binom{L,M}{\rho,\sigma}(z)$, etc.

Théorème 5. *À une constante multiplicative près, le problème de Padé* (23) *a une unique solution, et elle vérifie pour tout* $\ell = 0, \ldots, L-1$:

$$S_\ell\begin{pmatrix} L, M \\ \rho, \sigma \end{pmatrix}(z) = \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}k^\ell}\left(\frac{(k-\rho)_\rho^L (k+n+1)_\sigma^M}{(k)_{n+1}^a}\right) z^{-k}$$

et

$$P_a\begin{pmatrix} L, M \\ \rho, \sigma \end{pmatrix}(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{ka} \frac{(-k-\rho)_\rho^L (n-k+1)_\sigma^M}{k!^a (n-k)!^a} z^k.$$

De plus, pour tout $j = 1, \ldots, a$, *on a* :

$$z^n P_j\begin{pmatrix} L, M \\ \rho, \sigma \end{pmatrix}(1/z) = (-1)^{a(n+1)+L\rho+M\sigma+j} P_j\begin{pmatrix} M, L \\ \sigma, \rho \end{pmatrix}(z)$$

et

$$z^n \overline{S}_\ell \binom{L, M}{\rho, \sigma}(1/z) = (-1)^{a(n+1)+L\rho+M\sigma} S_\ell \binom{M, L}{\sigma, \rho}(z).$$

On peut également généraliser le Théorème 4. On garde les mêmes notations que précédemment, et on suppose $M = L$, $\sigma = \rho$ et $2L\rho \leqslant a(n+1) - 2$. On cherche des polynômes $P_{0,\ell}$, $\overline{P}_{0,\ell}$, P_j (pour $1 \leqslant j \leqslant a$ et $0 \leqslant \ell \leqslant L-1$) de degré au plus n et des fonctions S_ℓ, $\overline{S}_\ell$ et R (qui dépendent aussi de ρ, L, a et n) tels que l'on ait simultanément les $2L+2$ conditions suivantes (pour $\ell = 0, \ldots, L-1$) :

$$\begin{cases} S_\ell(z) = P_{0,\ell}(z) + \displaystyle\sum_{j=1}^{a} \binom{\ell+j-1}{j-1} P_j(z)\,\mathrm{Li}_{\ell+j}(1/z) = \mathrm{O}\big(z^{-\rho-1}\big), \\ \overline{S}_\ell(z) = \overline{P}_{0,\ell}(z) + \displaystyle\sum_{j=1}^{a} (-1)^j \binom{\ell+j-1}{j-1} P_j(z)\,\mathrm{Li}_{\ell+j}(z) = \mathrm{O}\big(z^{n+\sigma+1}\big), \\ R(z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{a} (-1)^{j-1} P_j(z) \frac{\log^{j-1}(z)}{(j-1)!} = \mathrm{O}\big((1-z)^{a(n+1)-2L\rho-2}\big), \\ P_a\big((-1)^a\big) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Théorème 6. *À une constante multiplicative près, le problème de Padé* (24) *a une unique solution, et elle vérifie pour tout* $\ell = 0, \ldots, L-1$:

$$S_\ell(z) = \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}k^\ell} \left(\left(k + \frac{n}{2}\right) \frac{(k-\rho)_\rho^L (k+n+1)_\rho^L}{(k)_{n+1}^a} \right) z^{-k}$$

et

$$P_a(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{ka} \left(\frac{n}{2} - k\right) \frac{(-k-\rho)_\rho^L (n-k+1)_\rho^L}{k!^a (n-k)!^a} z^k.$$

De plus, pour tous $j = 1, \ldots, a$ *et* $\ell = 0, \ldots, L-1$, *on a* :

$$z^n P_j(1/z) = (-1)^{a(n+1)+j+1} P_j(z) \quad \textit{et} \quad z^n \overline{S}_\ell(1/z) = (-1)^{a(n+1)+1} S_\ell(z).$$

Nous omettons les démonstrations des Théorèmes 5 et 6 car elles sont tout à fait similaires à celles des Théorèmes 1 et 4 : les conditions à l'infini, resp. en 0, se traduisent par l'existence d'une fraction rationnelle $A(k) = Q(k)/(k)_{n+1}^a$ telle que $(k-\rho)_\rho^L$, respectivement $(k+n+1)_\sigma^M$, divise $Q(k)$, et la condition en 1 implique :

- dans le cas du Théorème 5, que $\deg(Q) \leqslant L\rho + M\sigma$, ce qui suffit ;
- dans le cas du Théorème 6, que $\deg(Q) \leqslant 2L\rho + 1$; on adapte alors la démonstration du Théorème 4.

Remarque. Si dans le problème (24), on remplace la condition $P_a((-1)^a) = 0$ par $P_a((-1)^{a+1}) = 0$, on trouve que ce nouveau problème a également une solution "unique", qui est la même que celle du problème (23) (avec $M = L$ et $\sigma = \rho$). C'est un exemple où plusieurs problèmes de Padé admettent une série donnée comme solution unique.

Avec $L = 3$, $a = 20$, $\rho = n$ et $\ell = 2$, le Théorème 6 donne la série utilisée dans [20] pour prouver l'irrationalité d'au moins un des neuf nombres $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(21)$:

$$\begin{aligned} &n!^{14} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}k^2} \left(\left(k + \frac{n}{2} \right) \frac{(k-n)_n^3 (k+n+1)_n^3}{(k)_{n+1}^{20}} \right) \\ &\quad = \alpha_{0,n} + \alpha_{5,n}\zeta(5) + \alpha_{7,n}\zeta(7) + \cdots + \alpha_{21,n}\zeta(21), \end{aligned}$$

pour certains rationnels $\alpha_{j,n}$.

Remarque. On pourrait aussi considérer des problèmes de Padé "non diagonaux", c'est-à-dire dans lesquels on demande $\deg(P_j) \leqslant n_j$, sans avoir forcément $n_1 = \cdots = n_a = n$. Ceci permettrait peut-être d'englober les séries considérées par Zudilin [24] pour démontrer qu'il y a au moins un irrationnel parmi les nombres $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ et $\zeta(11)$ (voir aussi [11, Paragraphe 3.3]).

5. Résolution du problème de Padé pour $\zeta(2)$

Nous donnons ici une solution alternative au problème de Padé (1) : déterminer pour tout entier $n \geqslant 0$ des polynômes a, b et c de degré au plus n et des fonctions S et R tels que

$$\begin{cases} S(z) = a(z)\,\mathrm{Li}_2(1/z) + b(z)\,\mathrm{Li}_1(1/z) + c(z) = \mathrm{O}\big(z^{-n-1}\big), \\ R(z) = a(z)\log(z) - b(z) = \mathrm{O}\big((1-z)^{n+1}\big). \end{cases}$$

En adaptant une méthode utilisée par Sorokin [23] (et qui se rapproche d'une méthode exposée par Siegel [22] pour déterminer les approximants de Padé usuels de la fonction exponentielle), nous allons montrer la :

Proposition 3. *À une constante multiplicative près, le problème* (1) *admet une solution unique qui vérifie* :

$$S(z) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n (1-y)^n}{(z-xy)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{25}$$

En développant l'intégrale comme série entière en $1/z$, on retrouve la série (4). Pour $z = 1$, on obtient l'intégrale introduite par Beukers dans [6].

Nous aurons besoin des deux lemmes suivants, dont nous omettons les démonstrations, car ils sont classiques (voir par exemple [1] pour le Lemme 4 et [21, p. 60], pour le Lemme 5).

Lemme 4. *Le problème de Padé consistant à déterminer des polynômes P et Q de degré au plus n tels que $V(z) = Q(z)\,\mathrm{Li}_1(1/z) + P(z) = \mathrm{O}(z^{-n-1})$ admet une solution unique* (*à une constante multiplicative près*) *et on a* :

$$V(z) = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(z-x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Lemme 5. *Soit P_{n+1} l'opérateur intégral défini, pour toute fonction f analytique dans un voisinage de l'infini, par*

$$P_{n+1}(f)(z) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_z^\infty (x-z)^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Soit g une fonction analytique dans un voisinage de l'infini et telle que $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$. *Alors*

$$g^{(n+1)} = f \quad \textit{équivaut à} \quad g = P_{n+1}(f). \tag{26}$$

Démonstration de la Proposition 3. Il existe au moins une solution non triviale, qui donne des fonctions $S(z)$ et $R(z)$. Nous allons montrer que $S(z)$ est un multiple de l'intégrale (25). Remarquons tout d'abord que[4] :

$$\mathrm{Li}_2(1/z) + \log(z)\,\mathrm{Li}_1(1/z) = \pi^2/6 - \mathrm{Li}_2(1-1/z).$$

On en déduit que la fonction $T(z)$ définie par :

$$T(z) = S(z) + \mathrm{Li}_1(1/z)R(z) = a(z)\big(\mathrm{Li}_2(1/z) + \log(z)\,\mathrm{Li}_1(1/z)\big) + c(z),$$

est analytique au voisinage de 1. De plus, la condition en 1 sur $R(z)$ implique que $(\mathrm{Li}_1(1/z)R(z))^{(n+1)}$ a, au plus, une singularité logarithmique en 1. Donc

$$S^{(n+1)}(z) = T^{(n+1)}(z) - \big(\mathrm{Li}_1(1/z)R(z)\big)^{(n+1)}$$

a, au plus, une singularité logarithmique en 1. Comme par ailleurs,

$$S^{(n+1)}(z) = \frac{\widetilde{Q}(z)}{z^{n+1}(1-z)^{n+1}}\,\mathrm{Li}_1(1/z) + \frac{\widetilde{P}(z)}{z^{n+1}(1-z)^{n+1}},$$

[4] Cela se vérifie en dérivant les deux membres, avec $z\,\mathrm{d}/\mathrm{d}z\,\mathrm{Li}_2(z) = \mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-z)$.

où $\widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}$ sont des polynômes de degré au plus $2n+1$, on en déduit que $(1-z)^{n+1}$ divise $\widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}$.

En résumé, on a montré l'existence de polynômes P et Q de degré au plus n tels que $z^{n+1}S^{(n+1)}(z) = Q(z)\,\mathrm{Li}_1(1/z) + P(z) = \mathrm{O}(z^{-n-1})$: le Lemme 4 assure qu'il existe une constante c telle que

$$S^{(n+1)}(z) = (-1)^{n+1} c z^{-n-1} \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(z-x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Il suffit alors d'appliquer le Lemme 5 à $g(z) = S(z)$ (qui tend vers 0 à l'infini) et $f(z) = S^{(n+1)}(z)$:

$$\begin{aligned} S(z) = P_{n+1}\big(S^{(n+1)}(z)\big) &= \frac{c}{n!}\int_z^\infty \left(1-\frac{z}{u}\right)^n \left(\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(u-x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\right)\frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= \frac{c}{n!}\int_0^1 (1-y)^n \left(\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(z/y-x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\right)\frac{\mathrm{d}y}{y} \\ &= \frac{c}{n!}\int_0^1\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n}{(z-xy)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \quad \square \end{aligned}$$

6. Démonstration du Théorème 2

6.1. *Structure de la preuve*

Considérons les fonctions $S_n(z)$ et $R_n(z)$, de la variable réelle $z \geqslant 1$, définies par :

$$S_n(z) = n!^{a-r}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-rn)_{rn}}{(k)_{n+1}^a} z^{-k} \quad \text{et} \quad R_n(z) = \frac{n!^{a-r}}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{(s-rn)_{rn}}{(s)_{n+1}^a} z^{-s}\,\mathrm{d}s,$$

où $\mathcal{C}$ est un lacet direct entourant les points $-n, -n+1, \ldots, 0$, et r un entier tel que $1 \leqslant r \leqslant a$. On déduit du Théorème 1 l'existence de polynômes $P_{j,n}$ de degré au plus n tels que

$$\begin{cases} S_n(z) = P_{0,n}(z) + \displaystyle\sum_{j=1}^{a} P_{j,n}(z)\,\mathrm{Li}_j(1/z) = \mathrm{O}\big(z^{-rn-1}\big), \\ R_n(z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{a} P_{j,n}(z)\frac{\log^{j-1}(1/z)}{(j-1)!} = \mathrm{O}\big((1-z)^{(a-r)n+a-1}\big). \end{cases}$$

Soient λ et μ deux réels et z un rationnel tels que $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ et $z > 1$. La démontration du Théorème 2 consiste à appliquer le critère d'indépendance linéaire ci-dessous à l'expression :

$$\lambda S_n(z) + \mu \log(1/z) R_n(z) = \lambda P_{0,n}(z) + \sum_{j=1}^{a} P_{j,n}(z)\left(\lambda \operatorname{Li}_j(1/z) + \mu \frac{\log^j(1/z)}{(j-1)!}\right).$$

Proposition 4 (Critère de Nesterenko). *Soit $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_N$ des nombres réels. Supposons qu'il existe N suites d'entiers $(p_{l,n})_{n\geqslant 0}$ et des réels $\alpha, \beta > 0$ tels que*

(i) $|\sum_{l=1}^{N} p_{l,n}\vartheta_l| = \alpha^{n+\mathrm{o}(n)}$;
(ii) $\forall l = 1, \ldots, N$, $|p_{l,n}| \leqslant \beta^{n+\mathrm{o}(n)}$.

Dans ces conditions, on a

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\,\vartheta_1 + \mathbb{Q}\,\vartheta_2 + \cdots + \mathbb{Q}\,\vartheta_N) \geqslant \frac{\log(\beta) - \log(\alpha)}{\log(\beta)}.$$

Nous devrons donc déterminer un dénominateur commun aux $P_{j,n}(z)$, ainsi que le comportement asymptotique de $|\lambda S_n(z) + \mu \log(1/z) R_n(z)|^{1/n}$ et de $|P_{j,n}(z)|^{1/n}$. Pour cela, nous estimerons le comportement asymptotique de $|R_n(z)|^{1/n}$ en utilisant la Proposition 2.

On note d_n le p.p.c.m. des entiers $1, 2, \ldots, n$: le théorème des nombres premiers implique que

$$d_n = \mathrm{e}^{n+\mathrm{o}(n)}.$$

Nous ne donnons pas les démonstrations des Lemmes 6 et 7 ci-dessous. En effet, la série $S_n(z)$ coïncide avec la série $N_{n,a,r}(z)$ mentionnée dans l'introduction et ces lemmes sont démontrés au Chapitre 2 de [19].

6.2. Estimations arithmétiques et asymptotiques

Lemme 6. *Pour tout entier $j \in \{0, 1, \ldots, a\}$, on a $d_n^{a-j} P_{j,n}(z) \in \mathbb{Z}[z]$. De plus, les coefficients $p_{j,i,n}$ des polynômes $P_{j,n}(z)$ vérifient, pour tout $j \in \{0, \ldots, a\}$ et tout $i \in \{0, \ldots, n\}$:*

$$\limsup_{n\to+\infty} |p_{j,i,n}|^{1/n} \leqslant 2^{a+r+1} r^r.$$

En particulier, pour tout réel $z > 1$ et pour tout j on a :

$$\limsup_{n\to+\infty} \left|P_{j,n}(z)\right|^{1/n} \leqslant 2^{a+r+1} r^r z.$$

Lemme 7. *Pour tout réel $z > 1$, on a* :

$$S_n(z) = \frac{(rn)!}{n!^r} \int\limits_{[0,1]^a} \left(\frac{\prod_{j=1}^a x_j^r (1-x_j)}{(z - x_1 x_2 \cdots x_a)^r} \right)^n \frac{\mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_a}{z - x_1 x_2 \cdots x_a}. \tag{27}$$

On en déduit que pour tout réel $z > 1$, la limite $\varphi_{a,r,z}$ de la suite $|S_n(z)|^{1/n}$ existe et vérifie :

$$\frac{\mathrm{e}^{-a}}{z^r (r+1)^a} \leqslant \varphi_{a,r,z} \leqslant \frac{1}{z^r r^{a-r}}. \tag{28}$$

Remarque. Montrons la minoration de $\varphi_{a,r,z}$, puisque le reste est démontré dans [19]. La formule de Stirling donne $\lim_{n\to\infty}((rn)!/n!^r)^{1/n} = r^r$ et $\varphi_{a,r,z}$ est égal au maximum sur $[0,1]^a$ de la fonction

$$\underline{x} \mapsto r^r \left| \frac{\prod_{j=1}^a x_j^r (1-x_j)}{(z - x_1 x_2 \cdots x_a)^r} \right|.$$

Comme $z > 1$, on peut majorer son dénominateur par z^r. En considérant le point $x_1 = \cdots = x_a = r/(r+1)$ et en remarquant que $(r/(r+1))^r \geqslant \mathrm{e}^{-1}$, on obtient :

$$\varphi_{a,r,z} \geqslant \frac{r^r}{z^r} \left(\frac{r^r}{(r+1)^{r+1}} \right)^a \geqslant \frac{\mathrm{e}^{-a}}{z^r (r+1)^a}.$$

Lemme 8. *Pour tout réel $z > 1$, si $a > r \geqslant 1$, alors*

$$\psi_{a,r,z} = \limsup_{n\to+\infty} \big| R_n(z) \big|^{1/n} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{2a+1} r^r}{(a-r)^{a-r}} \cdot z \log^{a-r}(z). \tag{29}$$

Démonstration. Les diverses suites $c(n)$ qui apparaissent ci-dessous sont explicitables ; elles dépendent éventuellement de a et de r, mais pas de z, et vérifient $\lim_{n\to+\infty} c(n)^{1/n} = 1$. D'après la Proposition 2, dont on reprend les notations, on a :

$$R_n(z) = \sum_{d=(a-r)n+a}^{\infty} (-1)^{d-1} \mathfrak{A}_d \frac{\log^{d-1}(z)}{(d-1)!}$$

avec

$$\mathfrak{A}_d = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{a} (-1)^{j+d} \binom{d-1}{d-j} i^{d-j} p_{j,i,n}.$$

Comme $|p_{j,i,n}| \leqslant c_1(n) 2^{(a+r+1)n} r^{rn}$ d'après le Lemme 6, on en déduit pour $d \geqslant 2a-1$:

$$\begin{aligned}|\mathfrak{A}_d| &\leqslant c_1(n)2^{(a+r+1)n}r^{rn}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{a}\binom{d-1}{d-j}i^{d-j}\\ &\leqslant c_2(n)2^{(a+r+1)n}r^{rn}\binom{d-1}{d-a}n^{d-1}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\bigl|R_n(z)\bigr| &\leqslant c_2(n)2^{(a+r+1)n}r^{rn}\sum_{d=(a-r)n+a-1}^{\infty}\frac{\binom{d}{d-a+1}n^d\log^d(z)}{d!}\\ &\leqslant c_3(n)2^{(a+r+1)n}r^{rn}\log(z)^{a-1}\sum_{d=(a-r)n}^{\infty}\frac{(n\log(z))^d}{d!}.\end{aligned}$$

En appliquant l'identité

$$\sum_{d=\ell+1}^{\infty}\frac{t^d}{d!}=\frac{1}{\ell!}\int_0^t(t-x)^\ell\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x,$$

on obtient :

$$\sum_{d=(a-r)n}^{\infty}\frac{(n\log(z))^d}{d!}\leqslant z^n\cdot\frac{(n\log(z))^{(a-r)n}}{((a-r)n-1)!}.$$

Par la formule de Stirling, on en déduit que

$$\bigl|R_n(z)\bigr|\leqslant c_4(n)2^{(a+r+1)n}r^{rn}\cdot\frac{\mathrm{e}^{(a-r)n}}{(a-r)^{(a-r)n}}\cdot z^n\log(z)^{(a-r)n+a-1}.$$

Finalement

$$\limsup_{n\to\infty}\bigl|R_n(z)\bigr|^{1/n}\leqslant\frac{\mathrm{e}^{2a+1}r^r}{(a-r)^{a-r}}\cdot z\log^{a-r}(z).\quad\square$$

6.3. Fin de la démonstration du Théorème 2

Fixons les réels λ et μ et le rationnel $z=q/p>1$. Si $\lambda=0$, le Théorème 2 est démontré (essentiellement par cette méthode, avec $r=0$) dans [17]. On peut donc supposer que $\lambda=1$. Définissons les entiers $\pi_{0,n}(z)=d_n^a p^n P_{0,n}(z)$ et $\pi_{j,n}(z)=d_n^a p^n P_{j,n}(z)$ pour $j\in\{1,\dots,a\}$, ainsi que la combinaison linéaire à coefficients entiers :

$$\begin{aligned}\ell_n(z) &= d_n^a p^n \big(S_n(z) + \mu \log(1/z) R_n(z)\big) \\ &= \pi_{0,n}(z) + \sum_{j=1}^{a} \pi_{j,n}(z)\left(\mathrm{Li}_j(1/z) + \mu \frac{\log^j(1/z)}{(j-1)!}\right).\end{aligned}$$

Notons $\delta_{z,\mu}(a)$ la dimension de l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{Q}$ par 1 et les

$$\mathrm{Li}_j(1/z) + \mu \frac{\log^j(1/z)}{(j-1)!} \quad \text{pour } j \in \{1, \dots, a\}.$$

Le Théorème 2 découle immédiatement de la proposition plus précise suivante :

Proposition 5. *Si $a > r = [a/\log^2(a)] \gg_z 0$, la limite de $|\ell_n(z)|^{1/n}$ existe et vérifie* :

$$\lim_{n\to+\infty} \big|\ell_n(z)\big|^{1/n} = \mathrm{e}^a \varphi_{a,r,z} p. \tag{30}$$

Pour tout $j \in \{0, 1, \dots, a\}$, on a :

$$\limsup_{n\to+\infty} \big|\pi_{j,n}(z)\big|^{1/n} \leqslant \mathrm{e}^a 2^{a+r+1} r^r q. \tag{31}$$

Enfin, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $a_0(\varepsilon, z)$, qui dépend de ε et de z, tel que pour tout $a \geqslant a_0(\varepsilon, z)$ on ait :

$$\delta_{z,\mu}(a) \geqslant \frac{1-\varepsilon}{1+\log(2)} \log(a).$$

Démonstration de la Proposition 5. Montrons tout d'abord que si

$$a > r = \big[a/\log^2(a)\big] \gg_z 0,$$

alors

$$\psi_{a,r,z} = \limsup_{n\to+\infty} \big|R_n(z)\big|^{1/n} < \lim_{n\to+\infty} \big|S_n(z)\big|^{1/n} = \varphi_{a,r,z}.$$

On vérifie en effet que, avec $r = [a/\log^2(a)]$, on a :

$$\frac{\varphi_{a,r,z}}{\psi_{a,r,z}} \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{3a+1} z^{r+1} \log(z)^{a-r}} \cdot \frac{(a-r)^{a-r}}{r^r (r+1)^a} \to +\infty \quad \text{quand } a \to +\infty.$$

On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \big|\ell_n(z)\big|^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \big|d_n^a p^n S_n(z)\big|^{1/n},$$

ce qui prouve (30). L'assertion (31) se déduit immédiatement du Lemme 6. On peut appliquer le critère de Nesterenko avec $\alpha = \mathrm{e}^a \varphi_{a,r,z} p \leqslant \mathrm{e}^a z^{-r} r^{r-a} p$ et $\beta = \mathrm{e}^a 2^{a+r+1} r^r q$: il vient alors :

$$\delta_{z,\mu}(a) \geqslant \frac{(a+r+1)\log(2) + (r+1)\log(z) + a\log(r)}{a + (a+r+1)\log(2) + \log(q) + r\log(r)}. \tag{32}$$

Un développement limité du membre de droite de (32) lorsque $a \to +\infty$, avec $r = [a/\log^2(a)]$, conclut la démonstration de la Proposition 5. □

Remarque. Lorsque a et r sont fixés, on montre que $\lim_{z\to+\infty} \varphi_{a,r,z} = 0$ alors que $\lim_{z\to+\infty} \psi_{a,r,z} = +\infty$. Il semble donc difficile de montrer, avec nos méthodes, que les nombres $\lambda\,\mathrm{Li}_a(1/z) + \mu \log^a(1/z)/(a-1)!$ sont irrationnels pour $z \gg_a 0$ quand λ et μ sont non nuls, bien que cela soit vrai quand $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$. C'est pourquoi nous avons adopté le point de vue inverse en fixant z et en faisant varier a et r.

7. Démonstration du Théorème 3

On utilise maintenant les deux fonctions :

$$S_n(z) = \frac{(2n)!^4}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-n)_n}{(k)_{2n+1}^4} z^{-k} \quad \text{et} \quad R_n(z) = \frac{(2n)!^4}{n!\,2\mathrm{i}\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{(s-n)_n}{(s)_{2n+1}^4} z^{-s}\,\mathrm{d}s,$$

où $\mathcal{C}$ est un lacet direct entourant les points $-2n, -2n+1, \ldots, 0$. Le Théorème 1 (en changeant n en $2n$) montre qu'il existe des polynômes $P_{j,n}$ de degré au plus $2n$ tels que

$$\begin{cases} S_n(z) = P_{0,n}(z) + \displaystyle\sum_{j=1}^{4} P_{j,n}(z)\,\mathrm{Li}_j(1/z) = \mathrm{O}\big(z^{-n-1}\big), \\ R_n(z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{4} P_{j,n}(z) \frac{\log^{j-1}(1/z)}{(j-1)!} = \mathrm{O}\big((1-z)^{7n+3}\big). \end{cases}$$

Posons $\ell_n = S_n(2) - \log(2) R_n(2)$. Comme $\mathrm{Li}_1(1/2) = \log(2)$, on a :

$$\ell_n = P_{0,n}(2) + P_{2,n}(2)\lambda_2 + P_{3,n}(2)\lambda_3 + P_{4,n}(2)\lambda_4$$

avec $\lambda_j = \mathrm{Li}_j(1/2) + \log^j(1/2)/(j-1)!$; cette combinaison linéaire ne fait pas intervenir $\log(2)$ puisque $\lambda_1 = 0$. Pour conclure, il suffit donc de déterminer un dénominateur commun D_n aux rationnels $P_{j,n}(2)$ et de montrer qu'on a $0 < \liminf_{n\to+\infty} |D_n \ell_n|^{1/n} < 1$.

Proposition 6. (i) *Pour tout* $j \in \{0, \ldots, 4\}$, *on a* $d_{2n}^4 P_{j,n}(z) \in \mathbb{Z}[z]$.

(ii) *On a* $\lim_{n\to+\infty} |S_n(2)|^{1/n} \approx \mathrm{e}^{-8,325073064}$.

(iii) *On a* $\lim_{n\to+\infty} |R_n(2)|^{1/n} \approx \mathrm{e}^{-9,799017432}$.

On déduit de cette proposition que d_{2n}^4 est le dénominateur D_n recherché et que

$$\lim_{n\to+\infty}\left|d_{2n}^4\,\ell_n\right|^{1/n}=\lim_{n\to+\infty}\left|d_{2n}^4\,S_n(2)\right|^{1/n}\approx \mathrm{e}^{-0,325073064}\in\,]0,1[,$$

ce qui prouve le Théorème 3.

Démonstration de la Proposition 6. (i) On écrit :

$$\frac{(2n)!^4}{n!}\cdot\frac{(k-n)_n}{(k)_{2n+1}^4}=\left(\frac{(2n)!(k-n)_n}{n!(k)_{2n+1}}\right)\cdot\left(\frac{(2n)!}{(k)_{2n+1}}\right)^3,$$

et on adapte ensuite la technique utilisée au Lemme 5 de [5], par exemple.

(ii) On pourrait utiliser la représentation intégrale de $S_n(z)$ mais nous donnons ici une démonstration alternative basée sur la seconde démonstration du Lemme 3 de [5]. En appliquant la formule de Stirling à

$$\frac{(2n)!^4}{n!}\cdot\frac{(k-n)_n}{2^k(k)_{2n+1}^4},\quad \text{avec } k=xn,\ x\geqslant 1,$$

on montre que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|S_n(2)\right|^{1/n}&=2^8\max_{x\in[1,+\infty[}\left(\frac{2^{-x}x^{5x}}{(x-1)^{x-1}(x+2)^{4(x+2)}}\right)\\&=2^8\frac{\alpha-1}{(\alpha+2)^8}\approx \mathrm{e}^{-8,325073064},\end{aligned}$$

où $\alpha\approx 1,006316912$ est l'unique solution >1 de $s^5-2(s-1)(s+2)^4=0$.

(iii) Par le changement de variables $s\mapsto -s$, on voit que

$$R_n(2)=(-1)^n\frac{(2n)!^4}{n!\,2\mathrm{i}\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{(s+1)_n}{(s-2n)_{2n+1}^4}2^s\,\mathrm{d}s,$$

où $\mathcal{C}$ est un lacet direct entourant les points $0,1,\ldots,2n$. En suivant [17], on peut déformer ce contour de telle sorte que pour tout réel $c>2$, on ait :

$$\begin{aligned}R_n(2)&=(-1)^n\frac{(2n)!^4}{n!\,2\mathrm{i}\pi}\int_{cn-\mathrm{i}\infty}^{cn+\mathrm{i}\infty}\frac{(s+1)_n}{(s-2n)_{2n+1}^4}2^s\,\mathrm{d}s\\&=(-1)^n n\frac{(2n)!^4}{n!\,2\mathrm{i}\pi}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\frac{\Gamma((s+1)n+1)\Gamma((s-2)n)^4}{\Gamma(sn+1)^5}2^{ns}\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

La formule de Stirling s'étend aux nombres complexes :

$$\Gamma(z) = (z/\mathrm{e})^z \sqrt{2\pi/z}\,\bigl(1 + \mathrm{O}\bigl(1/|z|\bigr)\bigr)$$

lorsque $|\arg(z)| < \pi$ et on en déduit que

$$R_n(2) = 2^8\,\alpha(n) \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} g(s)\mathrm{e}^{nw(s)}\,\mathrm{d}s \cdot \bigl(1 + \mathrm{O}(1/n)\bigr)$$

avec $c > 2$ quelconque,

$$g(s) = \sqrt{\frac{s+1}{s(s-2)^4}},$$
$$w(s) = (s+1)\log(s+1) + 4(s-2)\log(s-2) + s\log(2) - 5s\log(s)$$

et $\alpha(n)$ telle que $\lim_{n\to+\infty} |\alpha(n)|^{1/n} = 1$. Nous sommes maintenant en position d'appliquer la méthode du col, dont nous rappelons le principe ci-dessous. Comme

$$w'(s) = \log(s+1) + 4\log(s-2) + \log(2) - 5\log(s),$$

les solutions de l'équation $w'(s) = 0$ sont parmi les solutions de $s^5 - 2(s+1)(s-2)^4 = 0$. Cette dernière équation admet une unique solution réelle $\beta > 2$, qui vérifie *de facto* $w'(\beta) = 0$. On a $\beta \approx 11,31757856$ et le réel $w''(\beta)$ est non nul. L'étude des variations de la fonction $y \to \mathrm{Re}(w)(\beta + \mathrm{i}y)$ (à la manière de [20, p. 165]) montre que la droite $\mathrm{Re}(s) = \beta$ est admissible. On peut donc appliquer la Proposition 7 ci-dessous et en déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \bigl|R_n(2)\bigr|^{1/n} = 2^8 \frac{\beta+1}{(\beta-2)^8} \approx \mathrm{e}^{-9,799017432}. \quad \square$$

Pour conclure ce paragraphe, nous donnons maintenant un des énoncés possibles de la méthode du col : on se référera à [9, pp. 91–94] ou [10, pp. 279–285] pour plus de détails. Soit w une fonction analytique au voisinage d'un point z_0 et telle que $w'(z_0) = 0$ et $w''(z_0) = |w''(z_0)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0} \neq 0$. Au voisinage de z_0, on a

$$w(z) = w(z_0) + \frac{1}{2} w''(z_0)(z - z_0)^2 + \mathrm{O}\bigl((z - z_0)^3\bigr).$$

Soit L un chemin passant par z_0, et admettant une tangente Δ en ce point. Notons θ l'argument de $z - z_0$, défini modulo π, pour $z \in \Delta$. Supposons que $\cos(\alpha_0 + 2\theta) < 0$. Alors $\mathrm{Re}(\frac{1}{2} w''(z_0)(z - z_0)^2) < 0$ quand z parcourt L, au voisinage de z_0. La fonction $\mathrm{Re}(w(z))$ admet donc un maximum local en z_0 le long de L. On dit qu'un chemin L est admissible en z_0 si les conditions précédentes sont remplies, et que $\mathrm{Re}(w(z_0))$ est le maximum global de $\mathrm{Re}(w(z))$ le long de L.

Proposition 7. *Soient g et w deux fonctions analytiques dans un ouvert simplement connexe $\mathcal{D}$ du plan. Supposons qu'il existe $z_0 \in \mathcal{D}$ tel que $w'(z_0) = 0$ et $w''(z_0) = |w''(z_0)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_0} \neq 0$. Si L est un chemin inclus dans $\mathcal{D}$ et admissible en z_0, alors*

$$\int_L g(z)\,\mathrm{e}^{nw(z)}\,\mathrm{d}z = \pm\mathrm{i}\,g(z_0)\sqrt{\frac{2\pi}{n|w''(z_0)|}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0/2}\,\mathrm{e}^{nw(z_0)}\cdot\big(1+\mathrm{O}(1/n)\big),$$

où le signe $\pm$ dépend de l'orientation de L. De plus, cette estimation est encore valable si L est un chemin que l'on peut déformer en un chemin admissible en z_0.

8. Représentation intégrale réelle de $R_n(z)$

Lorsqu'on prend $\rho = \sigma = 0$ dans le Théorème 1, on a pour tous réels c et z tels que $c > n$ et $z > 0$:

$$R_n(z) = \frac{(-1)^{a(n+1)}}{2\mathrm{i}\pi}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\frac{n!^a}{(s-n)_n^a}z^s\,\mathrm{d}s.$$

Aux notations près, cette représentation complexe apparaît dans [17] où Reyssat montre que pour tout réel $w \geqslant 0$, $R_n(\mathrm{e}^w)$ se représente comme la puissance de convolution $R_n(\mathrm{e}^w) = q_n^{*a}(w)$ avec $q_n(w) = (\mathrm{e}^w - 1)^n$. Dans [2], Amoroso remarque qu'au moyen de changements de variables simples on peut transformer ce produit de convolution en l'intégrale suivante :

$$R_n(1-z) = z^{a(n+1)-1}\int_{[0,1]^{a-1}}\prod_{j=1}^{a-1}\frac{x_j^{j(n+1)-1}(1-x_j)^n}{(1-zx_j\cdots x_{a-1})^{n+1}}\,\mathrm{d}x_j.$$

En particulier, on en déduit que pour tout $z < 1$,

$$\lim_{n\to+\infty}\big|R_n(1-z)\big|^{1/n} = |z|^a\max_{\underline{x}\in[0,1]^{a-1}}\left(\prod_{j=1}^{a-1}\frac{x_j^j(1-x_j)}{1-zx_j\cdots x_{a-1}}\right) \leqslant \frac{|z|^a}{a^a}.$$

Il serait intéressant de généraliser cette représentation intégrale au cas où ρ et σ sont quelconques.

Remerciements

Nous tenons à remercier F. Amoroso, D. Bertrand, P. Grinspan, S. Khemira et M. Waldschmidt pour leurs commentaires qui ont permis d'améliorer une précédente version de ce texte.

Références

[1] K. Alladi, M. Robinson, Legendre polynomials and irrationality, J. Reine Angew. Math. 318 (1980) 137–155.

[2] F. Amoroso, Osservazioni sull'integrale "di Reyssat", Manuscrit non publié.

[3] G. Andrews, R. Askey, R. Roy, Special Functions, in : G.-C. Rota (Ed.), Encyclopedia Math. Appl., Vol. 71, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[4] R. Apéry, Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, Astérisque 61 (1979) 11–13.

[5] K.M. Ball, T. Rivoal, Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs, Invent. Math. 146 (1) (2001) 193–207.

[6] F. Beukers, A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$, Bull. London Math. Soc. 11 (1979) 268–272.

[7] F. Beukers, The values of polylogarithms, in : Topics in Classical Number Theory, in : Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Budapest, 1981, pp. 219–228.

[8] F. Beukers, Padé-approximations in number theory, in : Padé Approximation and its Applications, Amsterdam, 1980, in : Lecture Notes in Math., Vol. 888, Springer-Verlag, 1981, pp. 90–99.

[9] E.T. Copson, Asymptotic Expansions, Cambridge Univ. Press, 1967.

[10] J. Dieudonné, Calcul Infinitésimal, in : Collection "Méthodes", Hermann, 1980.

[11] S. Fischler, Irrationalité de valeurs de zêta (d'après Apéry, Rivoal, ...), in : Séminaire Bourbaki 2002–2003, exposé no. 910, à paraître dans Astérisque. http://arXiv.org/abs/math.NT/0303066.

[12] M. Hata, On the linear independence of the values of polylogarithmic functions, J. Math. Pures Appl. 69 (1990) 133–173.

[13] M. Huttner, Constructible sets of linear differential equations and effective rational approximations of G-functions, Pub. IRMA Lille 59 (2002).

[14] L. Lewin, Polylogarithms and Associated Functions, North-Holland, New York, 1981.

[15] Y.V. Nesterenko, A few remarks on $\zeta(3)$, Math. Notes 59 (6) (1996) 625–636.

[16] E.M. Nikishin, On the irrationality of the values of the functions $F(x,s)$, Mat. Sb. 37 (3) (1979) 381–388.

[17] E. Reyssat, Mesures de transcendance pour les logarithmes de nombres rationnels, in : Approximations Diophantiennes et Nombres Transcendants, Luminy, 1982, in : Progr. Math., Birkhäuser, 1983, pp. 235–245.

[18] T. Rivoal, La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 331 (4) (2000) 267–270, http://arXiv.org/abs/math.NT/0008051.

[19] T. Rivoal, Propriétés diophantiennes des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers impairs, Thèse de doctorat, Université de Caen (2001), http://theses-EN-ligne.in2p3.fr.

[20] T. Rivoal, Irrationalité d'au moins un des neuf nombres $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(21)$, Acta Arith. 103 (2) (2002) 157–167.

[21] A.B. Shidlovskii, Transcendental Numbers, in : de Gruyter Stud. Math., Vol. 12, Walter de Gruyter, Berlin, 1989.

[22] C.L. Siegel, Transcendental Numbers, in : Ann. Math. Stud., Vol. 16, Princeton Univ. Press, Princeton, 1949.

[23] V.N. Sorokin, Apéry's theorem, Moscow Univ. Math. Bull. 53 (3) (1998) 48–52.

[24] W. Zudilin, One of the numbers $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ is irrational, Russian Math. Surveys 56 (4) (2001) 774–776.