Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **15** (2003), 1–

Groupes de Rhin-Viola et intégrales multiples

par Stéphane FISCHLER

Résumé. Ce texte donne une nouvelle présentation, et une généralisation, des groupes qui apparaissent dans les travaux de Rhin-Viola ([8], [9]) sur les mesures d'irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. D'une part, on interprète ces groupes comme des groupes d'automorphismes, ce qui permet de déduire chacune des relations entre intégrales utilisées par Rhin-Viola d'un changement de variables. D'autre part, on considère plusieurs familles d'intégrales n-uples, et on montre que chacune d'elles est munie d'une action de groupe comme dans les travaux de Rhin-Viola. De plus, les valeurs de ces intégrales sont (conjecturalement, pour certaines) des formes linéaires, sur le corps des rationnels, en les polyzêtas de poids au plus n. Ces familles englobent beaucoup d'intégrales qui sont apparues dans l'étude des valeurs de ζ aux entiers. On exhibe un changement de variables entre deux de ces familles, qui permet de relier les approches de Beukers, Rhin-Viola, Vasilenko, Vasilyev d'une part, Sorokin et Rivoal d'autre part.

Abstract. This paper gives a new presentation, and a generalization, of the group structures in Rhin-Viola's work ([8], [9]) on irrationality measures of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$. On the one hand, these groups are seen as automorphism groups, which makes it possible to prove all relations between Rhin-Viola integrals using changes of variables. On the other hand, several families of n-dimensional integrals are considered, and each of them is shown to be equipped with a group action in the same fashion as in Rhin-Viola's work. Moreover, the values of these integrals are (sometimes conjecturally) linear forms, over the rationals, in multiple zeta values of weight at most n. Among these families lie many integrals that have appeared in the study of the values of ζ at integer points. A change of variables is given between two of these families, which connects the approach of Beukers, Rhin-Viola, Vasilenko, Vasilyev to that of Sorokin and Rivoal.

Les meilleures mesures d'irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ connues à ce jour sont dues à Rhin et Viola ([8], [9]) :

$$\mu(\zeta(2)) < 5.441243 \text{ et } \mu(\zeta(3)) < 5.513891.$$

Manuscrit reçu le 5 juin 2002.

Pour les obtenir, Rhin et Viola utilisent une famille d'intégrales doubles pour $\zeta(2)$:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^h(1-x)^i y^k(1-y)^j}{(1-xy)^{i+j-l}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1-xy}, \tag{1}$$

et triples pour $\zeta(3)$:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^h(1-x)^l y^k(1-y)^s z^j(1-z)^q}{(1-(1-xy)z)^{q+h-r}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{1-(1-xy)z} \quad \text{avec } j+q=l+s. \tag{2}$$

Le point clef de leur méthode est la présence d'un groupe de transformations sur les paramètres entiers h, i, j, k, l (respectivement h, j, k, l, m, q, r, s, avec $m = k + r - h$) qui multiplient l'intégrale par un facteur rationnel. L'étude de la valuation p-adique de ce facteur rationnel (qui est un quotient de produits de factorielles) permet d'obtenir un meilleur dénominateur pour les coefficients de la forme linéaire sur $\mathbb{Q}$ en 1 et $\zeta(2)$ (respectivement $\zeta(3)$) qu'est cette intégrale.

Dans les deux premières parties de ce texte, on construit une sous-variété $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^p$ (avec $p = 5$ pour $\zeta(2)$ et $p = 6$ pour $\zeta(3)$), un ouvert Ω de $\mathcal{V}$ (pour la topologie réelle), et une forme différentielle ω tels que les intégrales (1) et (2) s'écrivent sous la forme :

$$J(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) = \int_\Omega x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p} \omega.$$

L'invariance de (1) et (2) par le groupe diédral $\mathcal{D}_k$ (avec $k = 5$ pour $\zeta(2)$ et $k = 8$ pour $\zeta(3)$) correspond alors à une action sur $\mathcal{V}$ de ce groupe. Ces constructions sont analogues à celle que Pierre Cartier avait mentionnée, dans le cas de $\zeta(2)$, à la fin de son exposé aux douzièmes Rencontres Arithmétiques de Caen (en juin 2001). La nouveauté (en plus du cas de $\zeta(3)$) est que le groupe de Rhin-Viola tout entier s'interprète comme groupe d'automorphismes de $\Omega \times U$, en posant

$$U = \{(t_1, \ldots, t_k) \in]0,1[^k, t_1 + \cdots + t_k = 1\}.$$

On démontre ainsi toutes les égalités entre intégrales à partir d'automorphismes, dans l'esprit de la “philosophie des périodes” [7].

Un autre objectif de ce texte est d'étudier, avec autant de généralité que possible, des familles d'intégrales dont certains cas particuliers apparaissent dans les travaux récents sur l'irrationalité ou l'indépendance linéaire de valeurs de la fonction ζ aux entiers. Le point central est la recherche de changements de variables non triviaux ; ceci fournit des analogues, pour des intégrales n-uples, des situations considérées par Rhin et Viola pour $n = 2$ et $n = 3$. Toutes les intégrales n-uples qui apparaissent dans ce texte sont (conjecturalement, pour certaines) des formes linéaires sur $\mathbb{Q}$ en les polyzêtas de poids au plus n.

Une première direction consiste à généraliser les intégrales de Beukers [2] pour $\zeta(3)$:

$$\int_{[0,1]^3} \frac{x^N(1-x)^N y^N(1-y)^N z^N(1-z)^N}{(1-z(1-y(1-x)))^{N+1}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{3}$$

Ceci a été entrepris par Vasilenko [13] puis Vasilyev [14] qui posent

$$\delta_n(x_1,\dots,x_n) = 1 - x_n(1-x_{n-1}(1-\cdots(1-x_1)))$$

et considèrent, pour N entier naturel :

$$\int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{k=1}^n x_k^N(1-x_k)^N}{\delta_n(x_1,\dots,x_n)^N} \frac{\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n}{\delta_n(x_1,\dots,x_n)}. \tag{4}$$

Vasilyev démontre que pour $N=0$ cette intégrale vaut

$$2(-1)^{n-1}\mathrm{Li}_n((-1)^{n-1}),$$

donc est un multiple rationnel de $\zeta(n)$, et [15] que pour $n=5$ (respectivement $n=4$) et N quelconque c'est une forme linéaire en 1, $\zeta(3)$ et $\zeta(5)$ (respectivement 1, $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$). Il conjecture que pour tous n et N on obtient une forme linéaire en 1 et les valeurs de ζ aux entiers compris entre 2 et n ayant la même parité que n ; cette conjecture vient d'être démontrée par Zudilin [19]. Dans la troisième partie de ce texte, on considère une famille d'intégrales qui contient à la fois (1), (2) et (4) :

$$I(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n,c) = \int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{k=1}^n x_k^{a_k}(1-x_k)^{b_k}}{\delta_n(x_1,\dots,x_n)^c} \frac{\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n}{\delta_n(x_1,\dots,x_n)}. \tag{5}$$

En supposant que les $2n+1$ exposants vérifient certaines relations linéaires, on démontre qu'un groupe de Rhin-Viola agit sur cette famille, au sens suivant.

Définition : On dit qu'une famille de nombres $I(\underline{p}) \in \mathbb{R}_+^* \cup \{\infty\}$, paramétrés par $\underline{p} \in \mathbb{Z}^s$, admet pour groupe de Rhin-Viola un sous-groupe G de $\mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})$ si $I(g\underline{p})/I(\underline{p})$ est un rationnel (ou ∞) pour tous $g \in G$ et $\underline{p} \in \mathbb{Z}^s$ (avec $\infty/\infty = 1$).

Dans ce texte, les nombres $I(\underline{p})$ seront toujours donnés par des intégrales, et les facteurs rationnels $I(g\underline{p})/I(\underline{p})$ seront des quotients de produits de factorielles. De tels groupes sont connus depuis longtemps : ils apparaissent, par exemple, dans les travaux de Bailey, Dixon et Whipple.

Concernant la famille (5) (restreinte à des paramètres satisfaisant certaines relations linéaires), on exhibe deux changements de variables σ et ψ qui transforment une intégrale de cette famille en une de la même famille. On construit aussi un analogue de la transformation hypergéométrique φ

de [9], ce qui donne (pour chaque $n \geq 2$) un groupe de Rhin-Viola G, qui dans les cas particuliers $n = 2$ et $n = 3$ se spécialise en ceux de [8] et [9]. Cela permet aussi (voir le paragraphe 3.4) d'obtenir les formules (assez mystérieuses) qui définissent le changement de variables ϑ de [9] à partir d'autres formules de changements de variables ou de transformation hypergéométrique, moins mystérieuses car généralisables à tout $n \geq 2$.

Toujours dans un souci de généralité, on considère dans la quatrième partie de ce texte la famille suivante, qui contient (5) et dont on montre qu'elle admet aussi un groupe de Rhin-Viola :

$$L(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_2, \dots, c_n) = \int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{k=1}^n x_k^{a_k}(1-x_k)^{b_k}}{\prod_{k=2}^n \delta_k(x_1, \dots, x_k)^{c_k}} \frac{\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n}{\delta_n(x_1, \dots, x_n)}.$$

Une deuxième direction pour étudier les valeurs de ζ aux entiers (et, plus généralement, les polyzêtas) consiste à partir de la preuve de Sorokin [12] de l'irrationalité de $\zeta(3)$, qui utilise les intégrales suivantes :

$$\int_{[0,1]^3} \frac{x^N(1-x)^N y^N(1-y)^N z^N(1-z)^N}{(1-xy)^{N+1}(1-xyz)^{N+1}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{6}$$

Ces intégrales sont à rapprocher de celles que Sorokin introduit [11] en relation avec $\zeta(2, 2, \dots, 2)$, quand $n = 2p$ est pair :

$$\int_{[0,1]^n} \frac{(y_1y_2)^{p(N+1)-1}(y_3y_4)^{(p-1)(N+1)-1} \dots (y_{n-1}y_n)^N}{\prod_{k \in \{2,\dots,n\} \text{ pair}} (1-y_1y_2\dots y_k)^{N+1}} \times \prod_{k=1}^n (1-y_k)^N \mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_n, \tag{7}$$

et de celles qui apparaissent dans les travaux de Rivoal ([1], [10]) pour $r < \frac{n-1}{2}$:

$$\int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{k=1}^n y_k^{rN}(1-y_k)^N}{(1-y_1\dots y_n)^{(2r+1)N+2}} \mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_n. \tag{8}$$

Dans la cinquième partie de ce texte, on considère la famille suivante, qui contient ces trois cas particuliers :

$$K(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n, C_2, \dots, C_n) = \int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{k=1}^n y_k^{A_k}(1-y_k)^{B_k}}{\prod_{k=2}^n (1-y_1\dots y_k)^{C_k+1}} \mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_n. \tag{9}$$

On démontre que ces intégrales admettent un groupe de Rhin-Viola, et on exhibe (en réponse à une question de Tanguy Rivoal) un changement de variables qui les transforme en des intégrales de la forme :

$$\int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{k=1}^n x_k^{\tilde{a}_k}(1-x_k)^{\tilde{b}_k}}{\prod_{k=2}^n \delta_k(x_{n+1-k},\ldots,x_n)^{\tilde{c}_k}} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Dans l'autre sens, ce changement de variables permet d'écrire toute intégrale de la forme (5) sous la forme (9). L'intérêt de cette manipulation est que les intégrales (9) se développent naturellement en séries multiples. Par exemple, on transforme ainsi l'intégrale (3) en (6) : Beukers et Sorokin construisent exactement les mêmes formes linéaires en 1 et $\zeta(3)$.

Dans ce texte, on suppose toujours que les exposants dans les intégrales n-uples sont entiers ; cependant tous les résultats démontrés ici sont de nature analytique et se généralisent aisément à des exposants complexes.

Les résultats obtenus dans les trois dernières parties ont été annoncés dans [6].

Remerciements : Ce texte a beaucoup bénéficié de discussions avec Pierre Cartier et Tanguy Rivoal. Je tiens également à remercier Francesco Amoroso, Jacky Cresson, Gilles Damamme, Pierre Grinspan, Federico Pellarin, Serge Perrine, Georges Racinet, Eric Reyssat, Georges Rhin et Michel Waldschmidt pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail, ainsi que le referee pour sa lecture attentive.

1. Le cas de $\zeta(2)$

Dans cette partie, on donne une présentation "géométrique" du groupe de Rhin-Viola pour $\zeta(2)$ [8]. Au paragraphe 1.1, on écrit l'intégrale notée (1) dans l'introduction grâce à une sous-variété $\mathcal{V}_2$ de $\mathbb{R}^5$, dont on note Ω_2 l'ensemble des points à coordonnées strictement positives. L'action de $\mathcal{D}_5$ sur $\mathcal{V}_2$ (et sur Ω_2) traduit l'invariance de cette intégrale sous une action de $\mathcal{D}_5$. Au paragraphe 1.2, on interprète la transformation hypergéométrique de Rhin-Viola par un automorphisme non trivial d'une variété liée à $\mathcal{V}_2$. Le paragraphe suivant décrit le groupe de Rhin-Viola tout entier comme groupe d'automorphismes de $\Omega_2 \times U_2$, où U_2 est l'ensemble des $(t_1,\ldots,t_5) \in]0,1[^5$ tels que $t_1+\cdots+t_5=1$. Enfin, le paragraphe 1.4 contient des rappels, et quelques compléments, sur l'action du groupe de Rhin-Viola.

Dans cette partie et dans la suivante, pour toute fonction f on note $\mathrm{d}^\times f = \frac{\mathrm{d}f}{f}$.

1.1. La variété $\mathcal{V}_2$ et l'invariance par le groupe diédral.

Notons $\mathcal{V}_2$ la sous-variété algébrique affine de $\mathbb{R}^5$ définie par les équations suivantes :

$$x_1x_2(1+x_5x_3)=1, \quad x_2x_3(1+x_1x_4)=1, \quad x_3x_4(1+x_2x_5)=1,$$
$$x_4x_5(1+x_3x_1)=1, \quad x_5x_1(1+x_4x_2)=1.$$

On note Ω_2 l'ensemble des points de $\mathcal{V}_2$ à coordonnées strictement positives, et ω_2 la 2-forme différentielle $\mathrm{d}^\times(x_{i-1}x_i) \wedge \mathrm{d}^\times(x_i x_{i+1})$ sur $\mathcal{V}_2$, qui ne dépend pas du choix de $i \in \{1, \dots, 5\}$ (voir la preuve de la proposition ci-dessous) ; on pose $x_0 = x_5$, $x_6 = x_1$ et ainsi de suite.

Proposition 1. *La variété $\mathcal{V}_2$ est de dimension deux, et le groupe diédral $\mathcal{D}_5$ agit dessus par permutation des coordonnées. Cette action laisse stable Ω_2, ainsi que la forme différentielle ω_2 (au signe près).*

Démonstration : Les équations de $\mathcal{V}_2$ sont visiblement stables sous l'action naturelle de $\mathcal{D}_5$ sur les cinq coordonnées. Quant à la forme différentielle, elle est changée en son opposé par les symétries, et invariante par les rotations (ce qui montre que sa définition ne dépend pas du choix de $i \in \{1, \dots, 5\}$). Ceci provient, en faisant le produit extérieur par $\mathrm{d}^\times(x_i x_{i+1})$, de la relation suivante, elle-même obtenue par différentiation des équations de $\mathcal{V}_2$:

$$\mathrm{d}^\times(x_{i+1}x_{i+2}) = -\mathrm{d}^\times(x_{i-1}x_i) - \frac{\mathrm{d}^\times(x_i x_{i+1})}{x_{i-1}x_{i+2}}. \tag{10}$$

Pour montrer que $\mathcal{V}_2$ est de dimension deux, on montre que la première, la troisième et la quatrième équations qui la définissent sont indépendantes et engendrent les deux autres. Par exemple, on peut en déduire la deuxième comme suit, en posant $u_i = x_i x_{i+1}$:

$$\begin{aligned} u_1 u_3 &= (1 - u_5 u_2)(1 - u_2 u_4) \\ &= 1 - u_2(u_5 + u_4(1 - u_2 u_5)) \\ &= 1 - u_2(u_5 + u_4 u_1) \\ &= 1 - u_2. \end{aligned}$$

Proposition 2. *Les formules suivantes définissent une paramétrisation bijective de Ω_2 par $]0, 1[^2$, dans laquelle ω_2 correspond à $\frac{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{1-xy}$:*

$$x_1 = \left(\frac{xy(1-x)}{(1-y)(1-xy)} \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad x_2 = \left(\frac{(1-x)(1-y)}{xy(1-xy)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$x_3 = \left(\frac{xy(1-y)}{(1-x)(1-xy)} \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad x_4 = \left(\frac{(1-x)y(1-xy)}{x(1-y)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$x_5 = \left(\frac{x(1-y)(1-xy)}{(1-x)y} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration : Il s'agit de vérifications sans difficulté ; la réciproque est donnée par $x = x_1 x_5$ et $y = x_3 x_4$. On a alors : $\frac{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{1-xy} = \frac{\mathrm{d}(xy) \wedge \mathrm{d}y}{y(1-xy)} = \mathrm{d}^\times(x_3 x_4) \wedge \mathrm{d}^\times(x_4 x_5) = \omega_2$.

N.B. On pourrait faire disparaître les racines carrées dans les formules de la proposition 2, en remplaçant partout les x_i par leurs carrés (ce qui changerait les équations de $\mathcal{V}_2$).

Étant donnés cinq nombres réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$, on leur associe (pour faire le lien avec les notations de [8]) :

$$h = \frac{1}{2}(\alpha_5 + \alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_4), \qquad i = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_3 - \alpha_5),$$
$$j = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 - \alpha_4 - \alpha_1), \qquad k = \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_1 - \alpha_5 - \alpha_2),$$
$$l = \frac{1}{2}(\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_3).$$

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que h, i, j, k, l sont entiers. Les variables auxiliaires de [8] s'écrivent :

$$\begin{aligned} h + i - k &= \frac{1}{2}(\alpha_5 + \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4), \\ i + j - l &= \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5), \\ j + k - h &= \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_1), \\ k + l - i &= \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_1 - \alpha_2), \\ l + h - j &= \frac{1}{2}(\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3). \end{aligned}$$

A l'inverse, on peut retrouver $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ à partir de h, i, j, k, l grâce aux formules suivantes :

$$h + i = \alpha_1, \qquad i + j = \alpha_2, \qquad j + k = \alpha_3,$$
$$k + l = \alpha_4, \qquad l + h = \alpha_5.$$

On oriente Ω_2 par la paramétrisation de la proposition 2. Considérons l'intégrale suivante (qui est positive, éventuellement égale à $+\infty$) :

$$J(\alpha_1, \ldots, \alpha_5) = \int_{\Omega_2} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4} x_5^{\alpha_5} \omega_2.$$

D'après la proposition 2, on retrouve exactement l'intégrale notée $I(h, i, j, k, l)$ dans [8], à savoir :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^h (1-x)^i y^k (1-y)^j}{(1-xy)^{i+j-l}} \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{1-xy}.$$

En particulier, on voit facilement (ou on déduit de la proposition 16) que cette intégrale est finie si, et seulement si, les entiers h, i, j, k, l associés à $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ sont positifs. De la proposition 1 et de la formule de changement de variables (voir par exemple [4]) découle immédiatement le résultat suivant :

Corollaire 1. *L'action naturelle du groupe diédral $\mathcal{D}_5$ sur $(\alpha_1, \ldots, \alpha_5)$ laisse invariant $J(\alpha_1, \ldots, \alpha_5)$.*

N.B. Cette invariance par $\mathcal{D}_5$ correspond aux changements de variables τ et σ de [8].

1.2. La variété $\tilde{\mathcal{V}}_2$ et la transformation hypergéométrique.

$$\begin{aligned} y_3y_4(1+y_2y_5) &= 1, \\ y_5y_1(1+y_4y_2)+y_1y_2(1+y_5y_3) &= 1. \end{aligned} \tag{11}$$

On note $\tilde{\Omega}_2$ l'ensemble des points de $\tilde{\mathcal{V}}_2$ à coordonnées strictement positives, et $\tilde{\omega}_2$ la forme différentielle $y_1y_2y_3y_5\mathrm{d}^\times(y_1y_2)\wedge\mathrm{d}^\times(y_2y_3)\wedge\mathrm{d}^\times(y_3y_5)$ sur $\tilde{\Omega}_2$.

Proposition 3. *La variété $\tilde{\mathcal{V}}_2$ est de dimension trois. Quand on échange y_2 et y_5, $\tilde{\mathcal{V}}_2$ et $\tilde{\Omega}_2$ sont invariantes, et $\tilde{\omega}_2$ est changée en son opposé.*

N.B. Quand on échange y_3 et y_4, la variété $\tilde{\mathcal{V}}_2$ est aussi invariante (voir le paragraphe 1.4).

Démonstration de la proposition 3 : Elle est immédiate en ce qui concerne $\tilde{\mathcal{V}}_2$ et $\tilde{\Omega}_2$ (il suffit de développer la seconde équation de $\tilde{\mathcal{V}}_2$) ; pour la forme différentielle, on prend le produit extérieur par $\mathrm{d}^\times(y_2y_3)\wedge\mathrm{d}^\times(y_3y_5)$ de la relation $\mathrm{d}^\times(y_1y_2)-\mathrm{d}^\times(y_1y_5)=\mathrm{d}^\times(y_2/y_5)=\mathrm{d}^\times(y_2y_3)-\mathrm{d}^\times(y_3y_5)$.

Proposition 4. *Les formules suivantes définissent une bijection de $\Omega_2\times]0,1[$ dans $\tilde{\Omega}_2$:*

$$y_1 = x_1\,(t(1-t))^{\frac{1}{2}}, \qquad y_2 = x_2\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad y_3 = x_3\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$y_4 = x_4\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad y_5 = x_5\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dans cette bijection, la 3-forme $\tilde{\omega}_2$ correspond à $\omega_2\wedge\mathrm{d}t$.

Démonstration : Soit $(x_1,\ldots,x_5,t)\in\Omega_2\times]0,1[$. Le point $(y_1,\ldots,y_5)$ qui lui est associé vérifie $y_3y_4=x_3x_4$, $y_5y_1=(1-t)x_5x_1$, $y_2y_5=x_2x_5$, $y_4y_2=x_4x_2$, $y_1y_2=tx_1x_2$ et $y_5y_3=x_5x_3$. On en déduit immédiatement que les deux équations de $\tilde{\mathcal{V}}_2$ sont satisfaites pour le point $(y_1,\ldots,y_5)$: la seconde traduit l'identité $(1-t)+t=1$.

Exhibons la bijection réciproque en posant, pour $(y_1,\ldots,y_5)\in\tilde{\mathcal{V}}_2$:

$$t = y_1y_2(1+y_3y_5), \tag{12}$$

et en définissant $(x_1,\ldots,x_5)$ à l'aide des formules de la proposition 4. On a visiblement $t>0$, et aussi $t<1$ d'après (11). On vérifie aisément que $(x_1,\ldots,x_5,t)\in\Omega_2\times]0,1[$, et que les deux applications sont réciproques l'une de l'autre. En ce qui concerne la forme différentielle, on écrit :

$$\begin{aligned}\omega_2 \wedge \mathrm{d}t &= \mathrm{d}^\times(\frac{1}{t}y_1y_2) \wedge \mathrm{d}^\times(\frac{1-t}{t}y_2y_3) \wedge \mathrm{d}t \\ &= \mathrm{d}^\times(y_1y_2) \wedge \mathrm{d}^\times(y_2y_3) \wedge ((1+y_3y_5)\mathrm{d}(y_1y_2) + y_1y_2\mathrm{d}(y_3y_5)) \\ &= y_1y_2y_3y_5\mathrm{d}^\times(y_1y_2) \wedge \mathrm{d}^\times(y_2y_3) \wedge \mathrm{d}^\times(y_3y_5).\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de la proposition 4.

Corollaire 2. *On définit un automorphisme de* $\Omega_2\times]0,1[$ *en associant à* (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,t) *le point* $(x_1',x_2',x_3',x_4',x_5',t')$ *défini par les équations suivantes :*

$$t' = (1-x_1x_2)t + x_1x_5(1-t), \qquad x_1' = x_1\left(\frac{t(1-t)}{t'(1-t')}\right)^{\frac12},$$

$$x_2' = x_5\left(\frac{(1-t)(1-t')}{tt'}\right)^{\frac12}, \qquad x_3' = x_3\left(\frac{t(1-t')}{(1-t)t'}\right)^{\frac12},$$

$$x_4' = x_4\left(\frac{(1-t)t'}{t(1-t')}\right)^{\frac12}, \qquad x_5' = x_2\left(\frac{tt'}{(1-t)(1-t')}\right)^{\frac12}.$$

De plus, cet automorphisme change la 3-forme $\omega_2 \wedge \mathrm{d}t$ *sur* $\Omega_2\times]0,1[$ *en son opposé.*

Démonstration : Il s'agit du conjugué, par la bijection de la proposition 4, de l'automorphisme de $\tilde{\mathcal{V}}_2$ qui échange y_2 et y_5. Bien sûr, on peut aussi démontrer ce corollaire par un calcul direct, sans utiliser la variété $\tilde{\mathcal{V}}_2$.

Théorème 1. *Supposons que les entiers* h,i,j,k,l *associés à* $\alpha_1,\ldots,\alpha_5$ *sont positifs, ainsi que* $i+j-l$ *et* $l+h-j$*. Alors on a :*

$$(i+j-l)!(l+h-j)!J(\alpha_1,\ldots,\alpha_5) = h!i!J(\alpha_1,\alpha_5,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_2).$$

Ce théorème est crucial dans la méthode de Rhin-Viola. Il s'agit de la formule notée (3.3) dans [8] ; elle y est déduite de la représentation intégrale d'Euler de la fonction hypergéométrique de Gauss :

$$\frac{1}{h!i!}I(h,i,j,k,l) = \frac{1}{(i+j-l)!(l+h-j)!}I(i+j-l,l+h-j,j,k,l).$$

Démonstration du théorème 1 : Le théorème de Fubini et l'expression classique $\frac{a!b!}{(a+b+1)!} = \int_0^1 t^a(1-t)^b\mathrm{d}t$ de la fonction Bêta d'Euler montrent que le membre de gauche dans l'énoncé du théorème s'écrit :

$$\Gamma(\alpha_1)\int_{\Omega_2\times]0,1[} t^{\frac12(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5)}(1-t)^{\frac12(\alpha_4+\alpha_5+\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)} \times x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}x_4^{\alpha_4}x_5^{\alpha_5}\omega_2\wedge\mathrm{d}t. \tag{13}$$

La proposition 4 définit une orientation de $\tilde{\Omega}_2$ et montre que l'intégrale précédente vaut :

$$\Gamma(\alpha_1)\int_{\tilde{\Omega}_2} y_1^{\alpha_1}y_2^{\alpha_2}y_3^{\alpha_3}y_4^{\alpha_4}y_5^{\alpha_5}\tilde{\omega}_2.$$

La proposition 3 montre qu'on peut appliquer à cette intégrale le changement de variables qui échange y_2 et y_5 (voir [4] pour la formule de changement de variables quand la forme différentielle est changée en son opposé). Donc le membre de gauche du théorème 1 est invariant quand on échange α_2 et α_5 : il est égal au membre de droite.

N.B. On aurait pu appliquer le corollaire 2 pour démontrer directement que l'intégrale (13) est invariante quand on échange α_2 et α_5.

N.B. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_5$ agit sur $\mathbb{R}^5$ par permutation des coordonnées, donc aussi sur l'ensemble des sous-variétés algébriques de $\mathbb{R}^5$. Le stabilisateur de $\mathcal{V}_2$ pour cette action est le groupe diédral $\mathcal{D}_5$; l'orbite de $\mathcal{V}_2$ est donc formée par douze variétés. Les $J(\alpha_{\gamma(1)},\dots,\alpha_{\gamma(5)})$, pour $\gamma\in\mathfrak{S}_5$, sont les intégrales sur ces variétés du monôme $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}x_4^{\alpha_4}x_5^{\alpha_5}$.

1.3. Le groupe de Rhin-Viola comme groupe d'automorphismes.

Notons U_2 le simplexe de dimension 4 défini par :

$$U_2=\{(t_1,\dots,t_5)\in]0,1[^5,\ t_1+\dots+t_5=1\}.$$

On considère sur U_2 la 4-forme différentielle η_2 définie, pour $i\in\{1,\dots,5\}$, par :

$$\eta_2=\mathrm{d}t_i\wedge\mathrm{d}t_{i+1}\wedge\mathrm{d}t_{i+2}\wedge\mathrm{d}t_{i+3},$$

où on note $t_6=t_1$, et ainsi de suite. Il est immédiat que η_2 ne dépend pas du choix de i.

Sur $\Omega_2\times U_2$ on définit des fonctions $z_1,\dots,z_5$ qui à tout point $(\underline{x},\underline{t})=(x_1,\dots,x_5,t_1,\dots,t_5)$ associent :

$$z_1(\underline{x},\underline{t})=x_1\left(\frac{t_5t_1t_2}{t_4t_3}\right)^{\frac12},\quad z_2(\underline{x},\underline{t})=x_2\left(\frac{t_1t_2t_3}{t_5t_4}\right)^{\frac12},\quad z_3(\underline{x},\underline{t})=x_3\left(\frac{t_2t_3t_4}{t_1t_5}\right)^{\frac12},$$
$$z_4(\underline{x},\underline{t})=x_4\left(\frac{t_3t_4t_5}{t_2t_1}\right)^{\frac12},\quad z_5(\underline{x},\underline{t})=x_5\left(\frac{t_4t_5t_1}{t_3t_2}\right)^{\frac12}.$$

On peut résumer ces équations sous la forme générale suivante, pour $i\in\{1,\dots,5\}$:

$$z_i(\underline{x},\underline{t})=x_i\left(\frac{t_{i-1}t_it_{i+1}}{t_{i-2}t_{i+2}}\right)^{\frac12}.$$

Il convient de préciser les conventions qu'on utilise pour les différentes actions de $\mathfrak{S}_5$. Le groupe $\mathfrak{S}_5$ agit naturellement à droite sur l'ensemble des points $(x_1,\dots,x_5)$ de $\mathbb{R}^5$, par $\gamma\cdot(x_1,\dots,x_5)=(x_{\gamma(1)},\dots,x_{\gamma(5)})$ (et de même pour l'action sur U_2). On en déduit une action à gauche de $\mathfrak{S}_5$ sur l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}$, par composition. Ainsi, $\mathfrak{S}_5$ agit à gauche sur l'ensemble des cinq fonctions coordonnées $z_1, \dots, z_5$ (qui vont de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}$), par $(\gamma \cdot z_i)(\underline{x}) = z_i(\gamma \cdot \underline{x}) = z_{\gamma(i)}(\underline{x})$.

Concernant les exposants $\alpha_1, \dots, \alpha_5$, il y a deux manières de les considérer. Ou bien on note $(\alpha_1, \dots, \alpha_5)$ un point de $\mathbb{R}^5$, et $\mathfrak{S}_5$ agit à droite sur l'ensemble de ces points : c'est ce qu'on fait dans ce paragraphe. Ou bien on note $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ les formes linéaires coordonnées sur $\mathbb{R}^5$, et dans ce cas $\mathfrak{S}_5$ agit à gauche sur $\{\alpha_1, \dots, \alpha_5\}$. Dans les deux cas, on étend cette action par linéarité, et $\mathfrak{S}_5$ agit sur $\{h, \dots, l, h+i-k, \dots, l+h-j\}$. On reviendra sur cette ambiguïté au paragraphe 3.2.

Théorème 2. *Il existe un groupe H d'automorphismes de $\Omega_2 \times U_2$ (qui fixent, au signe près, $\omega_2 \wedge \eta_2$) et un homomorphisme de groupes surjectif $\pi : H \to \mathfrak{S}_5$ tels que, pour tout $f \in H$ et tout $i \in \{1, \dots, 5\}$, on ait :*

$$z_i \circ f = z_{\pi(f)^{-1}(i)}.$$

N.B. Les éléments de H sont des fonctions algébriques (au sens où elles sont définies par composition de fractions rationnelles et d'extractions de racines).

Corollaire 3. *La quantité suivante ne dépend pas du choix de $\gamma \in \mathfrak{S}_5$:*

$$\frac{J(\gamma(\alpha_1), \dots, \gamma(\alpha_5))}{\gamma(h)!\gamma(i)!\gamma(j)!\gamma(k)!\gamma(l)!}.$$

Ce corollaire contient toutes les identités entre intégrales utilisées par Rhin-Viola. On peut le déduire directement du corollaire 1 (qui donne l'invariance par $\mathcal{D}_5$) et du théorème 1 (qui donne l'invariance par φ) ; la démonstration présentée ici le relie aux automorphismes de $\Omega_2 \times U_2$.

Démonstration du corollaire 3 : Le théorème 2 montre que la quantité suivante est invariante sous l'action de $\mathfrak{S}_5$:

$$(\alpha_1 + \dots + \alpha_5 + 4)! \int_{\Omega_2 \times U_2} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} z_4^{\alpha_4} z_5^{\alpha_5} \omega_2 \wedge \eta_2 = J(\alpha_1, \dots, \alpha_5)$$
$$\times \int_{]0,+\infty[\times U_2} e^{-u} u^{\alpha_1 + \dots + \alpha_5} t_1^{h+i-k} t_2^{i+j-l} t_3^{j+k-h} t_4^{k+l-i} t_5^{l+h-j} u^4 \mathrm{d}u \wedge \eta_2.$$

En utilisant la relation

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_5 = (h+i-k) + (i+j-l) + (j+k-h) + (k+l-i) + (l+h-j)$$

et le changement de variables donné par $t'_i = ut_i$ pour tout $i \in \{1,\dots,5\}$ on obtient :

$$\int_{]0,+\infty[^5} e^{-(t'_1+\dots+t'_5)} {t'_1}^{h+i-k} {t'_2}^{i+j-l} {t'_3}^{j+k-h} {t'_4}^{k+l-i} {t'_5}^{l+h-j} \mathrm{d}t'_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}t'_5$$

$$= (h+i-k)!(i+j-l)!(j+k-h)!(k+l-i)!(l+h-j)!$$

En divisant par la quantité

$$(h+i-k)!(i+j-l)!(j+k-h)!(k+l-i)!(l+h-j)!h!i!j!k!l!$$

qui est elle aussi invariante par $\mathfrak{S}_5$ on conclut la démonstration du corollaire.

Démonstration du théorème 2 : Pour $\gamma \in \mathcal{D}_5$, notons f_γ l'automorphisme donné par l'action diagonale de $\gamma^{-1} \in \mathcal{D}_5$ sur $\Omega_2 \times U_2$, c'est-à-dire :

$$f_\gamma(x_1,\dots,x_5,t_1,\dots,t_5) = (x_{\gamma^{-1}(1)},\dots,x_{\gamma^{-1}(5)},t_{\gamma^{-1}(1)},\dots,t_{\gamma^{-1}(5)}).$$

Pour φ, on définit $(X_1,\dots,X_5,T_1,\dots,T_5) = f_\varphi(x_1,\dots,x_5,t_1,\dots,t_5)$ par les formules suivantes, directement inspirées de celles du corollaire 2 et de l'action de φ sur $h+i-k,\dots,l+h-j$:

$$T_1 = t_1, \qquad T_2 = (1-x_1x_2)t_2 + x_1x_5t_5, \qquad T_3 = t_4, \qquad T_4 = t_3,$$
$$T_5 = x_1x_2t_2 + (1-x_1x_5)t_5,$$

$$X_1 = x_1\left(\frac{t_2t_5}{T_2T_5}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad X_2 = x_5\left(\frac{t_5T_5}{t_2T_2}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad X_3 = x_3\left(\frac{t_2T_5}{t_5T_2}\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$X_4 = x_4\left(\frac{t_5T_2}{t_2T_5}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad X_5 = x_2\left(\frac{t_2T_2}{t_5T_5}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En fait les cinq dernières formules s'écrivent, pour $i \in \{1,\dots,5\}$:

$$X_i = x_{\varphi(i)}\left(\frac{T_{i-1}T_{i+2}}{T_{i-1}T_iT_{i+1}}\frac{t_{\varphi(i)-1}t_{\varphi(i)}t_{\varphi(i)+1}}{t_{\varphi(i)-1}t_{\varphi(i)+2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors f_φ (respectivement chacun des f_γ pour $\gamma \in \mathcal{D}_5$) est un automorphisme de $\Omega_2 \times U_2$ qui fixe au signe près la forme différentielle $\omega_2 \wedge \eta_2$, et induit sur les fonctions $z_1,\dots,z_5$ la permutation φ^{-1} (resp. γ^{-1}), c'est-à-dire qu'on a $z_i \circ f_\varphi = z_{\varphi^{-1}(i)}$ (resp. $z_i \circ f_\gamma = z_{\gamma^{-1}(i)}$) pour tout $i \in \{1,\dots,5\}$. Notons H le groupe d'automorphismes engendré par f_φ et les f_γ. Chaque élément f de H induit une permutation, notée $\pi(f)^{-1}$, des fonctions $z_1,\dots,z_5$. Cela termine la preuve du théorème 2.

N.B. Le fait qu'on ait $T_1 = t_1$ dans la définition de f_φ traduit l'invariance par φ de $h+i-k$. De même, les relations $T_3 = t_4$ et $T_4 = t_3$ traduisent que φ échange $j+k-h$ et $k+l-i$. Le niveau de φ s'interprète comme le nombre d'indices i tels que T_i ne soit pas l'un des t_j (voir le paragraphe suivant).

Question : Le morphisme π construit ici est-il injectif ?

1.4. Lien avec la présentation de Rhin-Viola.

Les dix variables $h, i, j, k, l, h+i-k, i+j-l, j+k-h, k+l-i, l+h-j$ correspondent (via la position des signes moins dans les expressions qui les définissent ci-dessus) aux dix parties à deux éléments de l'ensemble $\{1,2,3,4,5\}$. Si on considère un pentagone régulier dont les sommets sont numérotés de 1 à 5, les variables auxiliaires correspondent aux paires de sommets consécutifs (donc aux côtés du pentagone), alors que h, i, j, k, l correspondent aux paires de sommets non consécutifs (donc aux diagonales). Le groupe $\mathfrak{S}_5$ agit transitivement sur ces dix variables ; pour l'action du sous-groupe $\mathcal{D}_5$, il y a deux orbites : les variables auxiliaires d'une part, et $\{h, i, j, k, l\}$ d'autre part. Dans ce paragraphe, on considère $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ comme les formes linéaires coordonnées sur $\mathbb{R}^5$, donc $\mathfrak{S}_5$ agit à gauche sur les formes linéaires $h, \ldots, l+h-j$.

On remplace maintenant ces variables $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ par des réels, et on suppose que les dix combinaisons linéaires $h, i, j, k, l, h+i-k, i+j-l, j+k-h, k+l-i, l+h-j$ sont des entiers positifs. On conserve la même action de $\mathfrak{S}_5$. Notons, en accord avec [8], φ la transposition qui échange α_2 et α_5, τ la permutation circulaire qui envoie chaque α_i sur α_{i+1} et σ la double tranposition qui échange α_1 et α_3 ainsi que α_4 et α_5.

D'après le corollaire 3, en posant

$$\xi(\gamma; \alpha_1, \ldots, \alpha_5) = \frac{h!i!j!k!l!}{\gamma(h)!\gamma(i)!\gamma(j)!\gamma(k)!\gamma(l)}$$

on a pour tout $\gamma \in \mathfrak{S}_5$:

$$J(\alpha_{\gamma(1)}, \ldots, \alpha_{\gamma(5)}) = \xi(\gamma; \alpha_1, \ldots, \alpha_5) J(\alpha_1, \ldots, \alpha_5).$$

Dans le quotient de factorielles qu'est $\xi(\gamma; \alpha_1, \ldots, \alpha_5)$, des simplifications peuvent apparaître (même si $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ sont génériques, ce qu'on suppose ici). Rhin et Viola appellent *niveau* de $\gamma \in \mathfrak{S}_5$ le nombre de facteurs qu'il reste au numérateur une fois celles-ci effectuées ; c'est aussi le nombre de facteurs au dénominateur. Posons $\mathcal{A}_1 = \{h, i, j, k, l\}$ et $\mathcal{A}_2 = \{h+i-k, i+j-l, j+k-h, k+l-i, l+h-j\}$; ce sont deux $\mathcal{D}_5$-orbites dont la réunion est une $\mathfrak{S}_5$-orbite. Le niveau de γ est le nombre d'éléments de $\mathcal{A}_1$ que γ envoie dans $\mathcal{A}_2$: le numérateur est formé par les factorielles des éléments de $\mathcal{A}_1 \setminus \gamma \cdot \mathcal{A}_1$, et le dénominateur par les factorielles des éléments de $\mathcal{A}_2 \cap \gamma \cdot \mathcal{A}_1$. Comme $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont stables sous l'action de $\mathcal{D}_5$, le niveau de γ ne dépend que de la double classe $\mathcal{D}_5 \gamma \mathcal{D}_5$. En particulier, les éléments de $\mathcal{D}_5$ sont de niveau 0, et ceux de $\mathcal{D}_5 \varphi \mathcal{D}_5$ de niveau 2. Plus généralement, tout élément γ s'écrit comme un mot en les trois lettres φ, τ et σ ; le niveau de γ est alors inférieur ou égal au double du nombre minimal de φ qui apparaissent dans une telle écriture.

Un intérêt de la méthode présentée ici est qu'elle ne privilégie pas les générateurs σ, τ et φ. Ainsi, le théorème 2 traduit l'invariance de $\frac{J(\alpha_1,\ldots,\alpha_5)}{h!i!j!k!l!}$ par l'existence d'un groupe d'automorphismes de $\Omega_2 \times U_2$. Par ailleurs, pour chaque $\gamma \in \mathfrak{S}_5$ de niveau 2 on peut construire une variété $\tilde{\mathcal{V}}_2(\gamma)$ de manière analogue à $\tilde{\mathcal{V}}_2 = \tilde{\mathcal{V}}_2(\varphi)$ au paragraphe 1.2. On démontre la relation $J(\alpha_{\gamma(1)},\ldots,\alpha_{\gamma(5)}) = \xi(\gamma)J(\alpha_1,\ldots,\alpha_5)$ de même qu'on démontre le théorème 1, en remplaçant $\tilde{\mathcal{V}}_2$ par $\tilde{\mathcal{V}}_2(\gamma)$. D'ailleurs si on note $\sigma_1 = \tau^{-1}\sigma\tau$ l'élément de $\mathcal{D}_5$ qui échange α_2 et α_5, ainsi que α_3 et α_4, alors on a $\tilde{\mathcal{V}}_2 = \tilde{\mathcal{V}}_2(\varphi) = \tilde{\mathcal{V}}_2(\sigma_1\varphi)$. Ceci traduit que $\tilde{\mathcal{V}}_2$ est invariante par l'action de $\sigma_1\varphi$, qui échange y_3 et y_4.

En termes d'automorphismes, ce processus revient à composer à droite et/ou à gauche l'automorphisme de $\Omega_2\times]0,1[$ donné par le corollaire 2 par des automorphismes de $\Omega_2\times]0,1[$ provenant de ceux de Ω_2 fournis par l'action de $\mathcal{D}_5$. Ce point de vue conduit à ne pas privilégier φ, mais seulement la double classe $\mathcal{D}_5\varphi\mathcal{D}_5$: le groupe $\mathfrak{S}_5$ est engendré par $\mathcal{D}_5$ (i.e. l'ensemble des éléments de niveau zéro) et un élément, quelconque, de $\mathcal{D}_5\varphi\mathcal{D}_5$ (i.e. de niveau 2).

Enfin, le choix de paramètres effectué dans [8] pour obtenir la meilleure mesure d'irrationalité connue (qui est $h = i = 12$, $j = k = 14$, $l = 13$) correspond, avec les notations introduites ici, à $\alpha_1 = 24$, $\alpha_2 = 26$, $\alpha_3 = 28$, $\alpha_4 = 27$, $\alpha_5 = 25$.

2. Le cas de $\zeta(3)$

Cette partie concerne le groupe de Rhin-Viola pour $\zeta(3)$ [9] ; elle est parallèle à la précédente.

2.1. La variété $\mathcal{V}_3$ et l'invariance par le groupe diédral.

Notons $\mathcal{V}_3$ la sous-variété algébrique quasiprojective de $\mathbb{R}^4$ définie par l'équation et les inéquations suivantes :

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_4} = 0, \tag{14}$$

$$x_1x_2x_3x_4 \neq 0,$$

$$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_1) \neq 0, \tag{15}$$

$$(x_1x_2 - 1)(x_2x_3 - 1)(x_3x_4 - 1)(x_4x_1 - 1) \neq 0. \tag{16}$$

La relation (14) peut être remplacée par chacune des deux équations suivantes :

$$x_1x_2(x_3x_4-1)(x_3-x_4) = x_3x_4(x_1x_2-1)(x_2-x_1), \tag{17}$$

$$x_2x_3(x_4-x_1)(x_4x_1-1) = x_1x_4(x_2x_3-1)(x_3-x_2), \tag{18}$$

et elle implique[1] :

$$\begin{aligned} x_1(x_3-x_4)(x_2x_3-1)(x_3x_4-x_1x_2) \\ = x_3(x_4-x_1)(x_1x_2-1)(x_2x_3-x_1x_4). \end{aligned} \tag{19}$$

Considérons les trois fonctions $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ qui à tout point $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_4) \in \mathcal{V}_3$ associent respectivement (en utilisant les relations (17) et (18)) :

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}(\underline{x}) &= \frac{x_3-x_4}{x_1x_2-1} = \frac{x_3x_4}{x_1x_2}\frac{x_2-x_1}{x_3x_4-1}, \\ \mathfrak{b}(\underline{x}) &= \frac{x_1x_4-1}{x_2x_3-1} = \frac{x_1x_4}{x_2x_3}\frac{x_3-x_2}{x_4-x_1}, \\ \mathfrak{c}(\underline{x}) &= \frac{x_2x_3-x_1x_4}{x_2x_3-1} = 1-\mathfrak{b}(\underline{x}). \end{aligned}$$

On définit des fonctions ε_5 et ε_6, de $\mathcal{V}_3$ dans $\mathbb{R}$, en posant :

$$\varepsilon_5(\underline{x}) = \frac{x_1}{x_3}\frac{\mathfrak{a}(\underline{x})}{\mathfrak{b}(\underline{x})} \text{ et } \varepsilon_6(\underline{x}) = \frac{x_2}{x_4}\mathfrak{a}(\underline{x})\mathfrak{b}(\underline{x}). \tag{20}$$

On note Ω_3 l'ensemble des points $\underline{x} \in \mathcal{V}_3$ dont les quatre coordonnées sont strictement positives, et tels que les réels $\mathfrak{a}(\underline{x})$, $\mathfrak{b}(\underline{x})$ et $\mathfrak{c}(\underline{x})$ associés soient eux aussi strictement positifs. On introduit la forme différentielle suivante :

$$\omega_3 = -2\frac{x_2\mathfrak{a}(\underline{x})\mathfrak{b}(\underline{x})}{x_4^2-1}\mathrm{d}^\times x_1 \wedge \mathrm{d}^\times x_2 \wedge \mathrm{d}^\times x_3.$$

Considérons l'action naturelle du groupe diédral $\mathcal{D}_8$ à seize éléments sur l'octogone régulier dont les sommets sont, dans le sens direct, x_1, x_2, x_3, x_4, $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}$. Elle définit une action à droite de $\mathcal{D}_8$ sur $\mathbb{R}^{*4}$ (par exemple, la rotation d'un huitième de tour dans le sens direct envoie (x_1, x_2, x_3, x_4) sur $(x_2, x_3, x_4, \frac{1}{x_1})$). On en déduit une action à gauche de $\mathcal{D}_8$ sur l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^{*4}$ (ou d'une partie de $\mathbb{R}^{*4}$) dans $\mathbb{R}$: si f est une telle fonction et $\gamma \in \mathcal{D}_8$, on pose $\gamma \cdot f = f \circ \gamma$, c'est-à-dire :

$$(\gamma \cdot f)(x_1, \ldots, x_4) = f(\gamma \cdot (x_1, \ldots, x_4)).$$

Proposition 5. *La variété $\mathcal{V}_3$ est de dimension trois. L'action du groupe diédral $\mathcal{D}_8$ sur $\mathbb{R}^{*4}$ laisse stable $\mathcal{V}_3$, Ω_3, et la forme différentielle ω_3. De plus tout $\gamma \in \mathcal{D}_8$ de signature η_γ transforme ε_5 en $\varepsilon_5^{\eta_\gamma}$ et fixe ε_6.*

[1] Avec équivalence si $x_3 \neq x_1$.

Démonstration : Il est clair que $\mathcal{V}_3$ est de dimension trois, et qu'elle est stable par $\mathcal{D}_8$. Notons $\vartheta \in \mathcal{D}_8$ la rotation d'un huitième de tour dans le sens direct : on a $\vartheta(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_3, x_4, \frac{1}{x_1})$. Par ailleurs, notons σ la symétrie définie par $\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{1}{x_4}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_1})$. Alors ϑ échange les équations (17) et (18), alors que σ fixe (au signe près) la relation (14). Par ailleurs, on a :

$$\mathfrak{a}(\vartheta(\underline{x})) = \frac{1}{x_1}\mathfrak{b}(\underline{x}), \qquad \mathfrak{b}(\vartheta(\underline{x})) = \frac{x_2}{x_3 x_4}\mathfrak{a}(\underline{x}),$$

$$\mathfrak{a}(\sigma(\underline{x})) = \mathfrak{a}(\underline{x}), \qquad \mathfrak{b}(\sigma(\underline{x})) = \frac{x_2 x_3}{x_1 x_4}\mathfrak{b}(\underline{x}).$$

Cela donne $\vartheta \cdot \varepsilon_5 = \frac{1}{\varepsilon_5}$, $\sigma \cdot \varepsilon_5 = \varepsilon_5$, et $\vartheta \cdot \varepsilon_6 = \sigma \cdot \varepsilon_6 = \varepsilon_6$, ce qui prouve l'assertion de la proposition concernant ε_5 et ε_6. Pour obtenir la stabilité de Ω_3, il suffit d'utiliser la relation suivante, qu'on déduit de (19) :

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}(\vartheta(\underline{x})) = 1 - \frac{x_2\mathfrak{a}(\underline{x})}{x_3 x_4} &= 1 - (\frac{x_1 x_2 \mathfrak{a}(\underline{x})}{x_3 \mathfrak{c}(\underline{x})})(\frac{\mathfrak{c}(\underline{x})}{x_1 x_4}) \\ &= 1 - (1 - \frac{x_2 \mathfrak{a}(\underline{x})\mathfrak{b}(\underline{x})}{\mathfrak{c}(\underline{x})})(1 - \frac{x_2 x_3 \mathfrak{b}(\underline{x})}{x_1 x_4}).\end{aligned}$$

Quant à la forme différentielle, son invariance sous l'action de $\mathcal{D}_8$ provient de la formule suivante, qu'on déduit de (14) :

$$((x_4 - \frac{1}{x_4})\mathrm{d}^\times x_4 - (x_1 - \frac{1}{x_1})\mathrm{d}^\times x_1) \wedge \mathrm{d}^\times x_2 \wedge \mathrm{d}^\times x_3 = 0.$$

Ceci termine la preuve de la proposition 5.

Proposition 6. *Les formules suivantes définissent une paramétrisation bijective de Ω_3 par $]0,1[^3 \backslash Y$, où Y est une partie de $]0,1[^3$ dont la mesure de Lebesgue est nulle :*

$$x_1 = \left(\frac{xyz(1-x)}{(1-y)(1-z)(1-(1-xy)z)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$x_2 = \left(\frac{yz(1-x)(1-(1-xy)z)}{x(1-y)(1-z)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$x_3 = \left(\frac{y(1-x)(1-z)}{xz(1-y)(1-(1-xy)z)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$x_4 = \left(\frac{(1-x)(1-z)(1-(1-xy)z)}{xyz(1-y)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De plus, dans cette paramétrisation, ω_3 *correspond à* $\frac{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{1-(1-xy)z}$, *et on a :*

$$\varepsilon_5(x_1,\ldots,x_4) = \left(\frac{z(1-x)(1-y)(1-z)}{xy(1-(1-xy)z)}\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$\varepsilon_6(x_1,\ldots,x_4) = \left(\frac{xyz(1-x)(1-y)(1-z)}{1-(1-xy)z}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration : La partie Y de $]0,1[^3$ correspond aux inégalités qui apparaissent dans la définition de la variété quasiprojective $\mathcal{V}_3$ (voir ci-dessous). Pour $(x,y,z)\in]0,1[^3\backslash Y$, on vérifie que le point $(x_1,\ldots,x_4)$ associé appartient bien à Ω_3, et que les formules concernant $\varepsilon_5(\underline{x})$ et $\varepsilon_6(\underline{x})$ sont correctes. Pour obtenir la bijection réciproque, on pose :

$$x = \mathfrak{b}(\underline{x}), \qquad y = \frac{x_2x_3}{x_1x_4}\mathfrak{b}(\underline{x}), \qquad z = \frac{x_1x_2}{x_3}\frac{\mathfrak{a}(\underline{x})}{\mathfrak{c}(\underline{x})}.$$

On a alors, d'après (19) et (14) :

$$1-x = \mathfrak{c}(\underline{x}), \qquad 1-y = \frac{\mathfrak{c}(\underline{x})}{x_1x_4}, \qquad 1-z = x_2\frac{\mathfrak{a}(\underline{x})\mathfrak{b}(\underline{x})}{\mathfrak{c}(\underline{x})},$$
$$1-(1-xy)z = \frac{x_2}{x_1}\mathfrak{b}(\underline{x}).$$

Concernant la forme différentielle, il suffit de calculer $\mathrm{d}^\times x_1\wedge\mathrm{d}^\times x_2\wedge\mathrm{d}^\times x_3$, par exemple en l'écrivant sous la forme $\mathrm{d}^\times\frac{x_1}{x_3}\wedge\mathrm{d}^\times(x_2x_3)\wedge\mathrm{d}^\times x_3$, et de conclure grâce à l'égalité suivante :

$$\frac{x_2\mathfrak{a}(\underline{x})\mathfrak{b}(\underline{x})}{x_4^2-1} = \frac{xyz(1-x)(1-y)(1-z)}{(1-x)(1-z)(1-z(1-xy))-xyz(1-y)}.$$

N.B. La partie Y est donnée par les cas particuliers suivants :

$$\begin{array}{ccccc} x_1=x_2 & \iff & x_3x_4=1 & \iff & x=1-z(1-xy); \\ x_1x_2=1 & \iff & x_3=x_4 & \iff & y=1-z(1-xy); \\ x_2=x_3 & \iff & x_1=x_4 & \iff & 1-z=z(1-z(1-xy)); \\ x_2x_3=1 & \iff & x_1x_4=1 & \iff & x=y. \end{array}$$

N.B. Les équations de $\mathcal{V}_3$ montrent qu'on a aussi :

(21) $$x=\mathfrak{b}(\underline{x})=\sqrt{\frac{x_1x_4\varepsilon_6(\underline{x})}{x_2x_3\varepsilon_5(\underline{x})}} \quad \text{et} \quad y=\sqrt{\frac{x_2x_3\varepsilon_6(\underline{x})}{x_1x_4\varepsilon_5(\underline{x})}}.$$

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ six nombres réels. Pour faire le lien avec [9], on leur associe :

$$\begin{aligned}
h &= \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6),\\
j &= \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6),\\
k &= \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6),\\
l &= \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6),\\
m &= \frac{1}{2}(-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6),\\
q &= \frac{1}{2}(-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6),\\
r &= \frac{1}{2}(-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6),\\
s &= \frac{1}{2}(-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6).
\end{aligned}$$

Dans toute la suite, on suppose que h, j, k, l, m, q, r, s sont entiers. Dans [9], ces huit entiers sont soumis aux contraintes $j+q = l+s$ et $h+m = k+r$; ici, ces contraintes sont des conséquences des expressions de $h, \dots, s$ en fonction de $\alpha_1, \dots, \alpha_6$. Les six variables $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ ne sont soumises a priori à aucune relation linéaire.

Les "entiers auxiliaires" de [9] (formules (2.8) et (4.7)) sont alors :

$$\begin{aligned}
h' &= h + l - j = h + q - s = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6),\\
j' &= j + m - k = j + r - h = \frac{1}{2}(-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6),\\
k' &= k + q - l = k + s - j = \frac{1}{2}(-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6),\\
l' &= l + r - m = l + h - k = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6),\\
m' &= m + s - q = m + j - l = \frac{1}{2}(-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6),\\
q' &= q + h - r = q + k - m = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6),\\
r' &= r + j - s = r + l - q = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6),\\
s' &= s + k - h = s + m - r = \frac{1}{2}(-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6).
\end{aligned}$$

On oriente Ω_3 par la paramétrisation de la proposition 6. On considère l'intégrale suivante (qui est positive, et éventuellement égale à $+\infty$) :

$$J(\alpha_1, \dots, \alpha_6) = \int_{\Omega_3} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4} \varepsilon_5(\underline{x})^{\alpha_5} \varepsilon_6(\underline{x})^{\alpha_6} \omega_3.$$

D'après la proposition 6, on retrouve l'intégrale notée $I(h, j, k, l, m, q, r, s)$ dans [9], à savoir :

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^h(1-x)^l y^k (1-y)^s z^j (1-z)^q}{(1-(1-xy)z)^{q+h-r}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{1-(1-xy)z}.$$

D'après la proposition 9 ci-dessous (ou d'après la deuxième partie de [9]), cette intégrale est finie si, et seulement si, les huit entiers h, j, k, l, m, q, r, s associés à $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ sont positifs ou nuls.

Considérons l'action naturelle (à gauche) de $\mathcal{D}_8$ sur un octogone régulier dont les sommets sont $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, -\alpha_4$. Par exemple, la rotation d'un huitième de tour envoie α_i sur α_{i+1} pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et α_4 sur $-\alpha_1$. En outre, si $\gamma \in \mathcal{D}_8 \subset \mathfrak{S}_8$ a pour signature η_γ on pose $\gamma \cdot \alpha_5 = \eta_\gamma \alpha_5$ et $\gamma \cdot \alpha_6 = \alpha_6$. Par linéarité, on définit une action de $\mathcal{D}_8$ sur l'ensemble des combinaisons linéaires de $\alpha_1, \dots, \alpha_5$. On voit que $\{h, \dots, s\}$ est alors une $\mathcal{D}_8$-orbite, sur laquelle l'action est la même que sur un octogone dont les sommets seraient indexés par ces entiers (dans leur ordre alphabétique).

De la proposition 5 découle immédiatement le résultat suivant :

Corollaire 4. *L'action de* $\mathcal{D}_8$ *sur* $(\alpha_1, \dots, \alpha_6)$ *laisse invariant* $J(\alpha_1, \dots, \alpha_6)$.

N.B. Cette invariance par $\mathcal{D}_8$ correspond aux changements de variables ϑ et σ de [9].

2.2. La variété $\tilde{\mathcal{V}}_3$ et la transformation hypergéométrique.

Notons $\tilde{\mathcal{V}}_3$ la sous-variété algébrique quasiprojective de $\mathbb{R}^6$ définie par les équations et l'inéquation suivantes :

$$(y_2 - y_1 - y_1y_2y_4)(y_3 + y_5) = (y_1 - y_6)(y_4 - y_5 - y_2y_3y_4 + y_3y_4y_5), \tag{22}$$

$$y_1y_2y_6(y_3 + y_5)^2 = y_3y_4y_5(y_1 - y_6)^2, \tag{23}$$

$$y_3y_5(y_3 + y_5)(y_1 - y_6) \neq 0.$$

Notons $\tilde{\Omega}_3$ l'ensemble des points de $\tilde{\mathcal{V}}_3$ dont les six coordonnées sont strictement positives et vérifient :

$$y_1y_4y_5 > y_2y_3y_6, \tag{24}$$

$$\frac{y_3}{y_5} > (y_1y_2 - 1)\sqrt{\frac{y_3y_4y_6}{y_1y_2y_5}}. \tag{25}$$

Notons $\tilde{\omega}_3$ la 4-forme différentielle suivante :

$$\frac{-y_2y_4y_6\mathrm{d}^\times y_1\wedge\mathrm{d}^\times y_2\wedge\mathrm{d}^\times y_3\wedge((y_3y_4+1)\mathrm{d}^\times y_4+(y_3y_4-1)(\mathrm{d}^\times y_5+\mathrm{d}^\times y_6))}{y_2(y_4^2+1)(y_3y_4-1)+(y_1(y_4^2+1)-1)\sqrt{\frac{y_2y_3y_4}{y_1y_5y_6}}}.$$

Proposition 7. *La variété $\tilde{\mathcal{V}}_3$ est de dimension quatre. Quand on échange y_3 et $\frac{1}{y_5}$ (donc aussi y_5 et $\frac{1}{y_3}$) en fixant les autres coordonnées, $\tilde{\mathcal{V}}_3$ et $\tilde{\Omega}_3$ sont invariantes, et $\tilde{\omega}_3$ aussi au signe près.*

Démonstration : Les vérifications sont immédiates, sauf pour la forme différentielle (pour laquelle elles sont plus laborieuses).

N.B. On peut démontrer que $\tilde{\omega}_3$ est invariante (au signe près) de la manière suivante. Le théorème 3 ci-dessous (qui est démontré dans [9]) signifie que l'intégrale

$$\int_{\tilde{\Omega}_3} y_1^{\alpha_1}y_2^{\alpha_2}y_3^{\alpha_3}y_4^{\alpha_4}y_5^{\alpha_5}y_6^{\alpha_6}\tilde{\omega}_3$$

est invariante par le changement de variables qui échange y_3 et $\frac{1}{y_5}$ (donc y_5 et $\frac{1}{y_3}$) en fixant y_1, y_2, y_4 et y_6 (voir la preuve du théorème 3 pour les détails). On a donc, pour tous $\alpha_1,\ldots,\alpha_6$ tels que les dix entiers associés $h,j,k,l,m,q,r,s,q+h-r,r+j-s$ soient positifs :

$$\int_{\tilde{\Omega}_3} y_1^{\alpha_1}y_2^{\alpha_2}y_3^{\alpha_3}y_4^{\alpha_4}y_5^{\alpha_5}y_6^{\alpha_6}\tilde{\omega}_3=\varepsilon\int_{\tilde{\Omega}_3} y_1^{\alpha_1}y_2^{\alpha_2}y_3^{\alpha_3}y_4^{\alpha_4}y_5^{\alpha_5}y_6^{\alpha_6}\tilde{\omega}_3',$$

où $\tilde{\omega}_3'$ est l'image par ce changement de variables de $\tilde{\omega}_3$, et $\varepsilon=1$ si ce changement de variables conserve l'orientation de $\tilde{\Omega}_3$, et $\varepsilon=-1$ sinon. Donc l'intégrale de tous ces monômes en $y_1,\ldots,y_6$ contre $\tilde{\omega}_3-\varepsilon\tilde{\omega}_3'$ est nulle : il en découle $\tilde{\omega}_3'=\varepsilon\tilde{\omega}_3$.

Proposition 8. *Les formules suivantes définissent une bijection de $\Omega_3\times]0,1[$ dans $\tilde{\Omega}_3\setminus Y'$, où Y' est une partie de $\tilde{\Omega}_3$ dont la mesure de Lebesgue est nulle :*

$$y_1=x_1\sqrt{t(1-t)},\qquad y_2=x_2\sqrt{\frac{1-t}{t}},\qquad y_3=x_3\sqrt{\frac{t}{1-t}},$$
$$y_4=x_4\sqrt{\frac{1-t}{t}},\qquad y_5=\varepsilon_5(\underline{x})\sqrt{\frac{t}{1-t}},\qquad y_6=\varepsilon_6(\underline{x})\sqrt{t(1-t)}.$$

Dans cette bijection, la 4-forme $\tilde{\omega}_3$ correspond à $\omega_3\wedge\mathrm{d}t$.

Démonstration : On note Y' l'ensemble des $(y_1,\ldots,y_6)$ qui proviennent, par cette application, de points $(x_1,\ldots,x_4,t)$ pour lesquels l'une au moins des inéquations (15), (16) n'est pas vérifiée. Tout d'abord, montrons que pour tout $(x_1,\ldots,x_4,t)$ le point $(y_1,\ldots,y_6)$ défini par la proposition appartient à

$\tilde{\Omega}_3 \setminus Y'$. On déduit de (14) et des définitions de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ la relation $x_2(\mathfrak{b}(\underline{x})x_3^2 + x_1\mathfrak{a}(\underline{x})) = x_3(x_1x_4 - x_2\mathfrak{a}(\underline{x})\mathfrak{b}(\underline{x}))$, qui s'écrit aussi, en utilisant (21) :

$$\frac{x_1 - \varepsilon_6(\underline{x})}{x_3 + \varepsilon_5(\underline{x})} = \frac{x_2\mathfrak{b}(\underline{x})}{x_4} = \sqrt{\frac{x_1x_2\varepsilon_6(\underline{x})}{x_3x_4\varepsilon_5(\underline{x})}}. \tag{26}$$

La relation (23) découle immédiatement de (26). Par ailleurs, on peut traduire (22) par la nullité d'une fonction affine de t. Il suffit alors de montrer que les deux coefficients de cette fonction sont nuls, ce qui ne pose pas de difficulté à partir de (26) et des équations de $\mathcal{V}_3$.

Pour vérifier (24), il suffit de voir que $\frac{y_2y_3y_6}{y_1y_4y_5} = \frac{x_2x_3\varepsilon_6(\underline{x})}{x_1x_4\varepsilon_5(\underline{x})}$ est compris entre 0 et 1 d'après (21). Quant à (25), on peut la déduire de la relation $\frac{x_3}{\varepsilon_5(\underline{x})} > (x_1x_2 - 1)\sqrt{\frac{x_3x_4\varepsilon_6(\underline{x})}{x_1x_2\varepsilon_5(\underline{x})}}$, qui elle-même provient de (21).

On a donc montré que tout point $(y_1, \dots, y_6)$ défini par les formules de la proposition 8 appartient à $\tilde{\Omega}_3 \setminus Y'$. Réciproquement, à tout $(y_1, \dots, y_6) \in \tilde{\Omega}_3 \setminus Y'$ on associe

$$t = 1 - y_1y_4 + (y_2y_3 - 1)\sqrt{\frac{y_1y_4y_6}{y_2y_3y_5}}, \tag{27}$$

puis $x_1, \dots, x_4$ donnés par les quatre premières formules de la proposition 8. D'après la relation (24), on a $y_2y_3\sqrt{\frac{y_1y_4y_6}{y_2y_3y_5}} - y_1y_4 < 0$ donc $t < 1$. Pour montrer que t est strictement positif, il suffit d'après (25) de prouver la relation suivante :

$$t = \frac{y_3 - (y_1y_2 - 1)\sqrt{\frac{y_3y_4y_5y_6}{y_1y_2}}}{y_3 + y_4 + \sqrt{\frac{y_3y_4y_5y_6}{y_1y_2}}}. \tag{28}$$

Or déduire (28) de (22) revient à démontrer :

$$\begin{aligned}(1 - y_2(y_3 + y_4 + y_5) + y_4(\frac{1}{y_3} + y_5))\sqrt{\frac{y_1y_3y_6}{y_2y_4y_5}} \\ = 1 - y_1y_4 - \frac{y_6}{y_2} + y_3(y_6 - y_1),\end{aligned} \tag{29}$$

et le membre de droite de cette équation s'écrit, en remplaçant y_6 par sa valeur compte tenu de (23) :

$$(1 - y_1y_4 - \frac{y_1}{y_2}) + (1 + \frac{y_5}{y_3} - y_2(y_3 + y_5))\sqrt{\frac{y_1y_3y_6}{y_2y_4y_5}}.$$

Cette expression est égale au membre de gauche de (29), puisque la combinaison de (22) et (23) donne :

$$1 - y_1y_4 - \frac{y_1}{y_2} = (\frac{y_4 - y_5}{y_3} - y_2y_4 + y_4y_5)\sqrt{\frac{y_1y_3y_6}{y_2y_4y_5}}.$$

On a donc montré que t est strictement compris entre 0 et 1. Il reste à vérifier que le point $(x_1, \dots, x_4)$ appartient à Ω_3, et à démontrer les deux dernières relations de la proposition. On commence par exprimer t de la manière suivante, en utilisant les équations (22) et (27) :

$$t = \frac{y_1}{y_2} + (y_3y_4 - 1)\sqrt{\frac{y_1y_5y_6}{y_2y_3y_4}}. \tag{30}$$

Les équations (27), (28) et (30) se traduisent respectivement par les égalités suivantes, dans lesquelles les dénominateurs sont non nuls car $(y_1, \dots, y_6) \notin Y'$:

$$\begin{aligned}\frac{y_2y_3 - 1}{y_1y_4 - (1-t)} &= \sqrt{\frac{y_2y_3y_5}{y_1y_4y_6}},\\ \frac{(1-t)y_3 - ty_4}{y_1y_2 - (1-t)} &= \sqrt{\frac{y_3y_4y_5y_6}{y_1y_2}},\\ \frac{y_3y_4 - 1}{ty_2 - y_1} &= \sqrt{\frac{y_3y_4}{y_1y_2y_5y_6}}.\end{aligned}$$

Les deux premières égalités montrent que $\mathfrak{b}(\underline{x})$ et $\mathfrak{a}(\underline{x})$ sont strictement positifs. De plus, le produit et le quotient des deux premières égalités, ainsi que le produit de la deuxième et de la troisième, donnent :

$$\begin{aligned}&y_5 = \frac{y_1((1-t)y_3 - ty_4)(y_2y_3 - 1)}{y_3(y_1y_2 - (1-t))(y_1y_4 - (1-t))},\\ &y_6 = \frac{y_2((1-t)y_3 - ty_4)(y_1y_4 - (1-t))}{y_4(y_1y_2 - (1-t))(y_2y_3 - 1)},\\ &y_1y_2(y_3y_4 - 1)((1-t)y_3 - ty_4) = y_3y_4(y_1y_2 - (1-t))(ty_2 - y_1).\end{aligned}$$

De ces trois formules on déduit immédiatement d'une part les deux dernières relations de la proposition, et d'autre part l'égalité (17). Enfin, $\frac{x_2x_3 - x_1x_4}{x_2x_3 - 1}$ est égal à $\frac{y_1y_4 - y_2y_3\sqrt{\frac{y_1y_4y_6}{y_2y_3y_5}}}{1-t}$ d'après (27), donc strictement positif par l'hypothèse (24) : on a bien $\mathfrak{c}(\underline{x}) > 0$. Il en découle que le point $(x_1, \dots, x_4, t)$ appartient à $\Omega_3 \times]0, 1[$.

Quant à la forme différentielle, son expression se déduit immédiatement de la formule (30) pour t, et de la différentiation de cette même formule qui donne :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^\times y_1 \wedge \mathrm{d}^\times y_2 \wedge \mathrm{d}^\times y_3 \wedge \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y_1y_5y_6}{y_2y_3y_4}}\mathrm{d}^\times y_1 \wedge \mathrm{d}^\times y_2 \wedge \mathrm{d}^\times y_3 \wedge \Big((y_3y_4 + 1)\mathrm{d}^\times y_4\\ + (y_3y_4 - 1)(\mathrm{d}^\times y_5 + \mathrm{d}^\times y_6)\Big).\end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration de la proposition 8.

Corollaire 5. *On définit un automorphisme de* $\Omega_3\times]0,1[$ *en associant à* (x_1, x_2, x_3, x_4, t) *le point* $(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, t')$ *défini par les équations suivantes :*

$$t' = (1 - x_1\mathfrak{a}(\underline{x}))t + \mathfrak{b}(\underline{x})(1-t)$$

$$x'_1 = x_1\left(\frac{t(1-t)}{t'(1-t')}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad x'_2 = x_2\left(\frac{(1-t)t'}{t(1-t')}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$x'_3 = \frac{1}{\varepsilon_5(x_1,\ldots,x_4)}\left(\frac{(1-t)(1-t')}{tt'}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad x'_4 = x_4\left(\frac{(1-t)t'}{t(1-t')}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De plus, cet automorphisme change la 3-forme $\omega_3 \wedge \mathrm{d}t$ *sur* $\Omega_3\times]0,1[$ *en son opposé, on a :*

$$\varepsilon_5(x'_1,\ldots,x'_4) = \frac{1}{x_3}\left(\frac{(1-t)(1-t')}{tt'}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\varepsilon_6(x'_1,\ldots,x'_4) = \varepsilon_6(x_1,\ldots,x_4)\left(\frac{t(1-t)}{t'(1-t')}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration : Il s'agit du conjugué, par la bijection de la proposition 8, de l'automorphisme de $\tilde{\mathcal{V}}_3$ qui échange y_3 et $\frac{1}{y_5}$. On peut aussi démontrer ce corollaire par un calcul direct, sans utiliser la variété $\tilde{\mathcal{V}}_3$.

Théorème 3. *Supposons que les dix entiers* $h, j, k, l, m, q, r, s, q+h-r, r+j-s$ *associés à* $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ *sont positifs. Alors on a :*

$$(q+h-r)!\,(r+l-q)!\,J(\alpha_1,\ldots,\alpha_6) = h!\,l!\,J(\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_5, \alpha_4, -\alpha_3, \alpha_6).$$

Ce théorème est crucial dans la méthode de Rhin-Viola. Il s'agit de la formule notée (4.1) dans [9] ; elle y est déduite de la représentation intégrale d'Euler de la fonction hypergéométrique de Gauss :

$$\frac{1}{h!l!}I(h,j,k,l,m,q,r,s) = \frac{1}{(q+h-r)!(r+l-q)!}I(q+h-r,j,k,r+l-q,m,r,q,s).$$

Démonstration du théorème 3 : Le membre de gauche dans l'énoncé du théorème s'écrit, d'après le théorème de Fubini et la relation $\frac{a!b!}{(a+b+1)!} = \int_0^1 t^a(1-t)^b \mathrm{d}t$:

$$\Gamma(\alpha_1+\alpha_6)\int_{\Omega_3\times]0,1[} t^{\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6)}(1-t)^{\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4-\alpha_5+\alpha_6)} \times x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}x_4^{\alpha_4}\varepsilon_5(\underline{x})^{\alpha_5}\varepsilon_6(\underline{x})^{\alpha_6}\omega_3\wedge\mathrm{d}t.$$

La proposition 8 permet de transformer cette intégrale en l'intégrale suivante (dans laquelle l'orientation de $\tilde{\Omega}_3$ vient de sa paramétrisation par $]0,1[^3$) :

$$\Gamma(\alpha_1+\alpha_6)\int_{\tilde{\Omega}_3} y_1^{\alpha_1}y_2^{\alpha_2}y_3^{\alpha_3}y_4^{\alpha_4}y_5^{\alpha_5}y_6^{\alpha_6}\tilde{\omega}_3.$$

La proposition 7 et le changement de variables qui échange y_3 et $\frac{1}{y_5}$ (donc y_5 et $\frac{1}{y_3}$) en fixant y_1, y_2, y_4 et y_6 prouvent que cette intégrale est invariante quand on échange α_3 et $-\alpha_5$ en fixant α_1, α_2, α_4 et α_6. Donc $(q+h-r)!(r+l-q)!J(\alpha_1,\dots,\alpha_6)$ l'est aussi, ce qui termine la preuve du théorème 3.

2.3. Le groupe de Rhin-Viola comme groupe d'automorphismes.

Notons U_3 le simplexe de dimension 7 défini par :

$$U_3=\{(t_1,\dots,t_8)\in]0,1[^8,\ t_1+\dots+t_8=1\}.$$

On considère sur U_3 la 7-forme différentielle η_3 définie par :

$$\eta_3=\mathrm{d}t_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}t_7,$$

dont on voit qu'elle est invariante au signe près sous l'action naturelle de $\mathcal{D}_8$ sur U_3.

Sur $\Omega_3\times U_3$ on définit des fonctions $z_1,\dots,z_6$ qui à tout point $(\underline{x},\underline{t})=(x_1,\dots,x_4,t_1,\dots,t_8)$ associent :

$$z_1(\underline{x},\underline{t})=x_1\left(\frac{t_1t_4t_6t_7}{t_5t_8t_2t_3}\right)^{\frac12}, \qquad z_2(\underline{x},\underline{t})=x_2\left(\frac{t_2t_5t_7t_8}{t_6t_1t_3t_4}\right)^{\frac12},$$
$$z_3(\underline{x},\underline{t})=x_3\left(\frac{t_3t_6t_8t_1}{t_7t_2t_4t_5}\right)^{\frac12}, \qquad z_4(\underline{x},\underline{t})=x_4\left(\frac{t_4t_7t_1t_2}{t_8t_3t_5t_6}\right)^{\frac12},$$
$$z_5(\underline{x},\underline{t})=\varepsilon_5(x_1,\dots,x_4)\left(\frac{t_2t_4t_6t_8}{t_1t_3t_5t_7}\right)^{\frac12}, \quad z_6(\underline{x},\underline{t})=\varepsilon_6(x_1,\dots,x_4)(t_1t_2\dots t_8)^{\frac12}.$$

On peut résumer les quatre premières équations sous la forme suivante, pour $i\in\{1,\dots,4\}$:

$$z_i(\underline{x},\underline{t})=x_i\left(\frac{t_it_{i+3}t_{i+5}t_{i+6}}{t_{i+4}t_{i+7}t_{i+1}t_{i+2}}\right)^{\frac12}.$$

Notons Φ le groupe de Rhin-Viola, qui est isomorphe à $K\rtimes\mathfrak{S}_5$ où K est l'hyperplan d'équation $\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_5=0$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^5$ (voir le paragraphe 2.4). On le fait agir à gauche sur $\{z_1,\dots,z_5,\frac{1}{z_1},\dots,\frac{1}{z_5}\}$ de la manière suivante. Si $\gamma\in\Phi$ envoie α_i sur $\varepsilon_i\alpha_{\gamma^*(i)}$, avec $i\in\{1,\dots,5\}$ et $\varepsilon_i\in\{-1,1\}$, alors on pose $\gamma\cdot z_i=(z_{\gamma^*(i)})^{\varepsilon_i}$. Par ailleurs on pose $\gamma\cdot z_6=z_6$.

Théorème 4. *Il existe un groupe H d'automorphismes de $\Omega_3\times U_3$ (qui fixent, au signe près, $\omega_3\wedge\eta_3$) et un homomorphisme de groupes surjectif*

$\pi : H \to \Phi$ *tels que, pour tout* $f \in H$ *et tout* $i \in \{1, \ldots, 6\}$*, on ait :*

$$z_i \circ f = \pi(f)^{-1} \cdot z_i.$$

N.B. Les éléments de H sont des fonctions algébriques (au sens où elles sont définies par composition de fractions rationnelles et d'extractions de racines).

Corollaire 6. *La quantité suivante ne dépend pas du choix de* $\gamma \in \Phi$ *:*

$$\frac{J(\gamma(\alpha_1), \ldots, \gamma(\alpha_6))}{\gamma(h)!\gamma(j)!\gamma(k)!\gamma(l)!\gamma(m)!\gamma(q)!\gamma(r)!\gamma(s)!}.$$

N.B. Comme Φ est engendré par $\mathcal{D}_8$ et φ (voir le paragraphe 2.4), on peut déduire directement ce corollaire du corollaire 4 (qui donne l'invariance par $\mathcal{D}_8$) et du théorème 3 (qui donne l'invariance par φ). La démonstration qui suit fait le lien avec les automorphismes de $\Omega_3 \times U_3$.

Démonstration du corollaire 6 : Le théorème 4 montre que la quantité suivante est invariante sous l'action de Φ :

$$\begin{aligned}(4\alpha_6 + 7)! \int_{\Omega_3 \times U_3} & z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} z_4^{\alpha_4} z_5^{\alpha_5} z_6^{\alpha_6} \omega_3 \wedge \eta_3 \\ &= J(\alpha_1, \ldots, \alpha_6) \int_{]0,+\infty[\times U_3} e^{-u} u^{4\alpha_6} t_1^{h'} t_2^{j'} t_3^{k'} t_4^{l'} t_5^{m'} t_6^{q'} t_7^{r'} t_8^{s'} u^7 \mathrm{d}u \wedge \eta_3.\end{aligned}$$

En utilisant la relation $h' + \cdots + s' = 4\alpha_6$ et le changement de variables donné par $t_i' = u t_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, 8\}$ on obtient :

$$\begin{aligned}J(\alpha_1, \ldots, \alpha_6) \int_{]0,+\infty[^8} & e^{-(t_1' + \cdots + t_8')} {t_1'}^{h'} {t_2'}^{j'} {t_3'}^{k'} {t_4'}^{l'} {t_5'}^{m'} {t_6'}^{q'} {t_7'}^{r'} {t_8'}^{s'} \mathrm{d}t_1' \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}t_8' \\ &= h'!j'!k'!l'!m'!q'!r'!s'!J(\alpha_1, \ldots, \alpha_6).\end{aligned}$$

En divisant par la quantité $h'!j'!k'!l'!m'!q'!r'!s'!h!j!k!l!m!q!r!s!$, qui est elle aussi invariante par Φ, on conclut la démonstration du corollaire.

Démonstration du théorème 4 : Pour $\gamma \in \mathcal{D}_8$, notons f_γ l'automorphisme donné par l'action diagonale de $\gamma^{-1} \in \mathcal{D}_8$ sur $\Omega_3 \times U_3$. Pour φ, on définit $(X_1, \ldots, X_4, T_1, \ldots, T_8) = f_\varphi(x_1, \ldots, x_4, t_1, \ldots, t_8)$ par les formules suivantes, directement inspirées de celles du corollaire 5 et de l'action de φ sur $h', \ldots, s'$:

$$T_i = t_i \text{ pour } i \in \{1, \ldots, 4\}, \qquad T_5 = t_8, \quad T_6 = (1 - x_1 \mathfrak{a}(\underline{x}))t_6 + \mathfrak{b}(\underline{x})t_7,$$

$$T_7 = x_1 \mathfrak{a}(\underline{x}) t_6 + (1 - \mathfrak{b}(\underline{x}))t_7, \quad T_8 = t_5, \quad X_1 = x_1 \left(\frac{t_6 t_7}{T_6 T_7}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$X_2 = x_2 \left(\frac{t_7 T_6}{t_6 T_7}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad X_3 = \frac{1}{\varepsilon_5(x_1, \ldots, x_4)} \left(\frac{t_7 T_7}{t_6 T_6}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad X_4 = x_4 \left(\frac{t_7 T_6}{t_6 T_7}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On en déduit :

$$\varepsilon_5(X_1,\dots,X_4) = \frac{1}{x_3}\left(\frac{t_7T_7}{t_6T_6}\right)^{\frac12},$$
$$\varepsilon_6(X_1,\dots,X_4) = \varepsilon_6(x_1,\dots,x_4)\left(\frac{t_6t_7}{T_6T_7}\right)^{\frac12}.$$

Alors f_φ (respectivement chacun des f_γ pour $\gamma\in\mathcal{D}_8$) est un automorphisme de $\Omega_3\times U_3$ qui fixe au signe près la forme différentielle $\omega_3\wedge\eta_3$, et agit sur les fonctions $z_1,\dots,z_5,\frac{1}{z_1},\dots,\frac{1}{z_5},z_6$ comme φ^{-1} (resp. γ^{-1}), c'est-à-dire qu'on a $z_i\circ f_\varphi=\varphi^{-1}\cdot z_i$ (resp. $z_i\circ f_\gamma=\gamma^{-1}\cdot z_i$) pour tout $i\in\{1,\dots,6\}$. Notons H le groupe d'automorphismes engendré par f_φ et les f_γ. Chaque élément f de H agit sur les fonctions $z_1,\dots,z_5,\frac{1}{z_1},\dots,\frac{1}{z_5},z_6$ comme un unique élément de Φ, noté $\pi(f)^{-1}$. Cela termine la preuve du théorème 4.

Question : L'homomorphisme π ainsi construit est-il injectif ?

2.4. Lien avec la présentation de Rhin-Viola.

Dans ce paragraphe, on considère alternativement $\alpha_1,\dots,\alpha_6$ (ainsi que leurs combinaisons linéaires) comme des formes linéaires sur $\mathbb{R}^6$ ou comme des nombres réels. Dans ce deuxième cas, on suppose que les seize réels $h,j,k,l,m,q,r,s,h+l-j,j+m-k,k+q-l,l+r-m,m+s-q,q+h-r,r+j-s,s+k-h$ sont des entiers positifs. Toutes les actions considérées sont des actions à gauche.

Notons Φ le groupe formé par les permutations paires γ de l'ensemble à dix éléments $(\alpha_1,\dots,\alpha_5,-\alpha_1,\dots,-\alpha_5)$ qui vérifient $\gamma\cdot(-\alpha_i)=-\gamma\cdot\alpha_i$ pour tout $i\in\{1,\dots,5\}$. Tout tel élément induit une permutation γ^* de l'ensemble formé par les cinq paires $\{\alpha_1,-\alpha_1\}$, …, $\{\alpha_5,-\alpha_5\}$. On définit ainsi un morphisme de groupes surjectif de Φ dans $\mathfrak{S}_5$, dont le noyau K est isomorphe à l'hyperplan d'équation $\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_5=0$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^5$: les éléments de K envoient chaque α_i sur $(-1)^{\varepsilon_i}\alpha_i$, où $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_5\in\{0,1\}$ sont de somme paire.

On a une section de $\mathfrak{S}_5$ dans Φ, qui permet d'identifier Φ au produit semi-direct $K\rtimes\mathfrak{S}_5$ relatif à l'action naturelle de $\mathfrak{S}_5$ sur K. Tout élément $\gamma\in\Phi$ agit sur $(\alpha_1,\dots,\alpha_5,-\alpha_1,\dots,-\alpha_5)$ par une permutation des indices $1,2,3,4,5$, composée avec un changement de signe sur un nombre pair d'indices $i\in\{1,\dots,5\}$.

Cette action induit, par linéarité, une action de Φ sur l'ensemble $\mathcal{A}_1$ des sommes de la forme $\varepsilon_1\alpha_1+\cdots+\varepsilon_5\alpha_5$ avec $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_5\in\{-1,1\}$. Sous cette action, l'ensemble $\mathcal{A}_1$ se décompose en deux orbites, chacune de cardinal 16 ; celle qui servira dans la suite est l'ensemble $\mathcal{A}_2$ des sommes $\varepsilon_1\alpha_1+\cdots+\varepsilon_5\alpha_5$

où le produit des ε_i vaut 1. Cette Φ-orbite se scinde en deux $\mathcal{D}_8$-orbites[2] $\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}_4$, chacune de cardinal 8.

Pour décrire ces $\mathcal{D}_8$-orbites, on remarque qu'un élément $\varepsilon_1\alpha_1+\cdots+\varepsilon_5\alpha_5$ de $\mathcal{A}_2$ est déterminé de manière unique par $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_4$, qui sont quelconques dans $\{-1,1\}$. Un élément de $\mathcal{A}_2$ peut donc être vu comme une somme de 4 parmi les 8 termes $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,-\alpha_1,-\alpha_2,-\alpha_3,-\alpha_4$, de telle sorte que pour chaque indice i l'un exactement parmi α_i et $-\alpha_i$ fasse partie des 4 termes retenus. Cette interprétation est compatible avec l'action de $\mathcal{D}_8$ sur l'octogone régulier dont les sommets sont les huit termes ci-dessus. Les éléments de $\mathcal{A}_3$ correspondent alors aux choix de 4 sommets consécutifs de cet octogone.

Les huit éléments de $\mathcal{A}_3$, quand on leur ajoute α_6 et qu'on les divise par 2 (ce qui ne change rien à l'action de Φ, qui laisse α_6 invariant), sont exactement les huit nombres h,j,k,l,m,q,r,s définis ci-dessus. L'action de $\mathcal{D}_8$ induite sur $h,\ldots,s$ est celle dans laquelle la rotation d'un huitième de tour envoie h sur j, j sur k, et ainsi de suite. Quant aux huit éléments de $\mathcal{A}_4$, ils correspondent aux "entiers auxiliaires" h',j',k',l',m',q',r',s' (voir le paragraphe 2.1).

A l'inverse, on peut retrouver les α_i à partir de $\beta_1=h,\ldots,\beta_8=s$ par les formules suivantes (où on pose $\beta_9=\beta_1$, $\beta_{10}=\beta_2$ et ainsi de suite) :

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \frac{1}{2}(\beta_i+\beta_{i+3}-\beta_{i+4}-\beta_{i+7}) \text{ pour } 1\le i\le 4;\\
\alpha_5 &= \frac{(-1)^i}{2}(\beta_i+\beta_{i+4}-\beta_{i+1}-\beta_{i+5}) \text{ est indépendant de } i\in\{1,\ldots,8\};\\
\alpha_6 &= \frac{1}{2}(\beta_i+\beta_{i+4}+\beta_{i+1}+\beta_{i+5}) \text{ est indépendant de } i\in\{1,\ldots,8\}.
\end{aligned}$$

L'action de Φ sur $\alpha_1,\ldots,\alpha_5,-\alpha_1,\ldots,-\alpha_5$ correspond au plongement de Φ dans $\mathfrak{A}_{10}$ donné dans [9] (quatrième partie), puisque l'action sur α_6 est triviale et qu'on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\alpha_1+\alpha_6 &= h+l, \text{ noté } u_1 \text{ dans [9]},\\
\alpha_2+\alpha_6 &= j+m, \text{ noté } u_2,\\
\alpha_3+\alpha_6 &= k+q, \text{ noté } u_3,\\
\alpha_4+\alpha_6 &= l+r, \text{ noté } u_4,\\
-\alpha_1+\alpha_6 &= m+s, \text{ noté } u_5,\\
-\alpha_2+\alpha_6 &= q+h, \text{ noté } u_6,\\
-\alpha_3+\alpha_6 &= r+j, \text{ noté } u_7,
\end{aligned}$$

[2] Le groupe diédral $\mathcal{D}_8$ se plonge dans Φ grâce à l'action de $\mathcal{D}_8$ sur $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_5,-\alpha_1,\ldots,-\alpha_5\}$ définie au paragraphe 2.1.

$$\begin{aligned}
-\alpha_4 + \alpha_6 &= s + k, \text{ noté } u_8,\\
\alpha_5 + \alpha_6 &= j + q = l + s, \text{ noté } u_9,\\
-\alpha_5 + \alpha_6 &= k + r = h + m, \text{ noté } u_{10}.
\end{aligned}$$

Adoptons les notations suivantes, cohérentes avec celles de [9] et celles introduites ci-dessus. On note φ l'élément de Φ qui fixe α_1, α_2 et α_4, et échange α_3 et $-\alpha_5$ (donc aussi $-\alpha_3$ et α_5). On note ϑ l'élément de $\mathcal{D}_8$ qui correspond à la rotation d'un huitième de tour dans le sens direct : ϑ envoie α_i sur α_{i+1} pour $i \in \{1, 2, 3\}$, α_4 sur $-\alpha_1$ et α_5 sur $-\alpha_5$. Enfin, on note σ l'élément de $\mathcal{D}_8$ qui échange α_1 et $-\alpha_4$, ainsi que α_2 et $-\alpha_3$; on a $\sigma \cdot \alpha_5 = \alpha_5$.

Il est crucial de remarquer que Φ est engendré par $\mathcal{D}_8$ et φ. Une démonstration de ce fait se trouve dans [9] ; on la reproduit brièvement ici. Tout d'abord, on remarque que les éléments ϑ^4, $\vartheta\varphi\vartheta^4\varphi\vartheta^7$, $\varphi\vartheta^4\varphi$ et $\vartheta^3\varphi\vartheta^4\varphi\vartheta^5$ appartiennent à K, et agissent chacun en changeant le signe de quatre parmi les cinq α_i. On en déduit immédiatement que K est inclus dans le sous-groupe de Φ engendré par $\mathcal{D}_8$ et φ. En outre, ce sous-groupe est envoyé surjectivement sur $\mathfrak{S}_5$, car $\vartheta^*\varphi^*$ est un 5-cycle et φ^* est une transposition. Cela montre que ce sous-groupe est Φ tout entier.

À $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ et à tout $\gamma \in \Phi$ on associe le quotient de factorielles suivant :

$$\xi(\gamma; \alpha_1, \ldots, \alpha_6) = \frac{h!j!k!l!m!q!r!s!}{\gamma(h)!\gamma(j)!\gamma(k)!\gamma(l)!\gamma(m)!\gamma(q)!\gamma(r)!\gamma(s)!}.$$

On a alors, pour tout $\gamma \in \Phi$:

$$J(\alpha_1, \ldots, \alpha_6) = \xi(\gamma; \alpha_1, \ldots, \alpha_6) J(\gamma(\alpha_1), \ldots, \gamma(\alpha_6)).$$

Pour $\gamma \in \Phi$, il peut y avoir des simplifications dans $\xi(\gamma; \alpha_1, \ldots, \alpha_6)$. Rhin et Viola appellent *niveau* de γ le nombre de factorielles présentes au numérateur (ou au dénominateur) après ces simplifications (sans tenir compte des simplifications dues à un choix particulier des paramètres $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$). C'est le nombre d'éléments de $\mathcal{A}_3$ que γ envoie dans $\mathcal{A}_4$: le numérateur est formé par les factorielles des éléments de $\mathcal{A}_3 \setminus \gamma \cdot \mathcal{A}_3$, et le dénominateur par les factorielles des éléments de $\mathcal{A}_4 \cap \gamma \cdot \mathcal{A}_3$. Comme $\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}_4$ sont stables sous l'action de $\mathcal{D}_8$, le niveau de γ ne dépend que de la double classe $\mathcal{D}_8\gamma\mathcal{D}_8$. En particulier, les éléments de $\mathcal{D}_8$ sont de niveau 0, et ceux de $\mathcal{D}_8\varphi\mathcal{D}_8$ sont de niveau 2. Plus généralement, tout élément γ s'écrit comme un mot en les trois lettres φ, ϑ et σ ; le niveau de γ est alors inférieur ou égal au double du nombre minimal de φ qui apparaissent dans une telle écriture.

Le choix de paramètres utilisé dans [9] pour obtenir la meilleure mesure d'irrationalité connue est $h = 16$, $j = 17$, $k = 19$, $l = 15$, $m = 12$, $q = 11$, $r = 9$, $s = 13$. Il correspond à $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = -4$, $\alpha_5 = 0$, $\alpha_6 = 28$. Au vu de ce choix, on peut essayer de suivre la méthode de

Rhin-Viola en utilisant seulement le sous-groupe de Φ formé par les γ qui fixent $\{\alpha_5, -\alpha_5\}$, de manière à ne faire apparaître dans la preuve que des familles $(\alpha_1, \ldots, \alpha_6)$ vérifiant $\alpha_5 = 0$. Toutefois, cela donne une mesure d'irrationalité de $\zeta(3)$ strictement moins précise que celle obtenue par Rhin et Viola.

Ce choix de paramètres semble complètement mystérieux. Zudilin a fait de nombreux tests numériques [18] et n'a pas trouvé de meilleur choix ; en ce qui concerne l'exposant d'irrationalité de $\log(2)$ (qui peut se traiter parallèlement à $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$), Nicolas Brisebarre a essayé aussi [3] sans plus de succès. Quand on considère les paramètres $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$, les valeurs correspondant au choix de Rhin-Viola sont plus petites (sauf α_6, qui joue un rôle à part et n'intervient pas dans l'action du groupe), mais pas assez pour rendre "naturel" le choix de ces valeurs. Un autre changement de paramètres figure dans [18], ainsi qu'un lien entre les valeurs utilisées pour $\zeta(2)$ et pour $\zeta(3)$.

3. Une généralisation du groupe de Rhin-Viola à une famille d'intégrales n-uples

3.1. Notations.

Dans toute la suite de ce texte, on désigne par n un entier supérieur ou égal à deux. Soient $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ et $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ deux n-uplets d'entiers relatifs, et soit c un entier relatif. On note $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées d'un point de $[0,1]^n$, et par convention on pose $x_{n+1} = 0$. Suivant Vasilenko et Vasilyev, on définit des réels $\delta_0(\underline{x}), \ldots, \delta_n(\underline{x})$ compris entre 0 et 1 en posant $\delta_0(\underline{x}) = 1$ et $\delta_{k+1}(\underline{x}) = 1 - x_{k+1}\delta_k(\underline{x})$ pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Enfin, on pose $\delta_{n+1}(\underline{x}) = 1$. On peut aussi définir les $\delta_k(\underline{x})$ par la formule suivante, pour $k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\delta_k(\underline{x}) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} x_{j+1} \cdot \cdots \cdot x_k,$$

ou bien comme dans l'introduction par :

$$\delta_k(x_1, \ldots, x_n) = \delta_k(x_1, \ldots, x_k) = 1 - x_k(1 - x_{k-1}(1 - \cdots (1 - x_1))).$$

On a alors la propriété suivante :

$$\delta_{k+2} - x_{k+1}\delta_k(\underline{x}) = (1 - x_{k+2})\delta_{k+1}(\underline{x}) \text{ pour tout } k \in \{0, \ldots, n-2\}. \tag{31}$$

On note ω la n-forme différentielle sur $[0,1]^n$ définie par $\omega = \frac{\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n}{\delta_n(\underline{x})}$.

On considère, pour $n \geq 2$, des intégrales (éventuellement infinies) :

$$I(\underline{a}, \underline{b}, c) = \int_{[0,1]^n} \delta_n(\underline{x})^{-c} \prod_{k=1}^{n} x_k^{a_k} (1 - x_k)^{b_k} \omega. \tag{32}$$

Proposition 9. *Posons, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ qui a la même parité que n, avec la convention $a_0 = -1$:*

$$\tilde{a}_k = a_{k-1} + \frac{n-k}{2} + \sum_{\substack{j \in \{k, \dots, n\} \\ j \equiv n \bmod 2}} b_j.$$

Alors l'intégrale $I(\underline{a}, \underline{b}, c)$ est finie si, et seulement si, les conditions suivantes sont réalisées :

$$c \leq \min_{\substack{k \in \{1, \dots, n\} \\ k \equiv n \bmod 2}} \tilde{a}_k \text{ et, pour tout } k \in \{1, \dots, n\},\ a_k \geq 0 \text{ et } b_k \geq 0. \tag{33}$$

Cette proposition est un cas particulier de la proposition 13 qui est démontrée dans la quatrième partie de ce texte.

Pour retrouver la formulation classique de ces intégrales (par exemple pour $n = 2$ et $n = 3$), il convient de poser $x = 1 - x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ et ainsi de suite (on peut aussi inverser x et y). On a alors $\delta_2(\underline{x}) = 1 - xy$ et $\delta_3(\underline{x}) = 1 - z(1 - xy)$; l'utilisation de $1 - x$ comme première variable permet d'avoir des formules plus symétriques dans la définition des $\delta_k(\underline{x})$ donnée ci-dessus et dans celle de la transformation ψ ci-dessous.

Comme dans l'ensemble de ce texte, on suppose dans cette partie que les exposants (ici $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c$) sont entiers, mais tous les résultats (sauf bien sûr ceux du paragraphe 3.5) se généralisent au cas où ils sont complexes.

3.2. Définition des transformations.

Pour tout automorphisme g de $\mathbb{Z}^{2n+1}$, on note :

$$g(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c) = (\bar{g}(a_1), \dots, \bar{g}(a_n), \bar{g}(b_1), \dots, \bar{g}(b_n), \bar{g}(c)).$$

Alors $\bar{g}$ est essentiellement la transposée de g ; l'anti-isomorphisme qui à g associe $\bar{g}$ est le même que celui qui consiste à mettre en caractères gras dans les articles de Rhin-Viola. La notation $\bar{g}$ signifie que l'on pense à g comme à une permutation des lettres $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c$ (ou, plus généralement, à une application qui envoie chacune de ces lettres sur une combinaison linéaire de lettres).

Tout sous-groupe G de $\mathrm{GL}_{2n+1}(\mathbb{Z})$ agit naturellement à gauche sur les $(2n+1)$-uplets $(\underline{a}, \underline{b}, c)$ vus comme points de $\mathbb{Z}^{2n+1}$, et à droite sur les mêmes $(2n+1)$-uplets vus comme familles de formes linéaires sur $\mathbb{Z}^{2n+1}$. On note $\bar{g}$ quand on considère cette deuxième action ; on a $\overline{gg'} = \overline{g'}\,\overline{g}$, si bien que $\bar{g}$ agit à gauche.

N.B. La même distinction entre g et $\bar{g}$ est également utilisée dans les quatrième et cinquième parties de ce texte. Dans les deux premières parties, on notait simplement g les éléments du groupe de Rhin-Viola, dont on considérait des actions à droite ou à gauche.

Proposition 10. *Notons σ l'automorphisme de $\mathbb{Z}^{2n+1}$ tel que $\bar{\sigma}$ échange a_1 et b_2, ainsi que a_2 et b_1, et fixe les autres coordonnées. Alors on a, pour tout $(\underline{a}, \underline{b}, c) \in \mathbb{Z}^{2n+1}$:*

$$I(\underline{a}, \underline{b}, c) = I(\sigma(\underline{a}, \underline{b}, c)).$$

N.B. En particulier, si $(\underline{a}, \underline{b}, c)$ vérifie les conditions (33) alors $\sigma(\underline{a}, \underline{b}, c)$ aussi.

Démonstration de la proposition 10 : Considérons le changement de variables (encore noté σ) de $[0,1]^n$ dans lui-même qui envoie x_1 sur $1-x_2$, x_2 sur $1-x_1$ et qui fixe x_k pour tout $k \in \{3, \dots, n\}$. Alors σ change la forme différentielle ω en son opposé ; on en déduit immédiatement le résultat, grâce au théorème de changement de variables dans une intégrale multiple (voir [4], chapitre 1, paragraphe 4.10).

N.B. Le changement de variables σ est involutif, préserve le facteur

$$\frac{\prod_{k=1}^n x_k(1-x_k)}{\delta_n(\underline{x})},$$

et vérifie $\delta_1(\sigma(\underline{x})) = x_2$ et $\delta_k(\sigma(\underline{x})) = \delta_k(\underline{x})$ pour tout $k \in \{0, \dots, n+1\} \setminus \{1\}$. En fonction des variables $x, y, \dots$, utilisées couramment, il s'agit de la transformation qui échange x et y en fixant les autres variables.

Proposition 11. *Notons ψ l'automorphisme de $\mathbb{Z}^{2n+1}$ défini par :*

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}(a_k) &= a_{n+1-k} \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, n\},\\
\bar{\psi}(b_1) &= a_{n-1} + b_n - c,\\
\bar{\psi}(b_k) &= b_{n+2-k} \text{ pour tout } k \in \{2, \dots, n\},\\
\bar{\psi}(c) &= a_2 + b_2 - b_1.
\end{aligned}$$

Soit $(\underline{a}, \underline{b}, c) \in \mathbb{Z}^{2n+1}$ un triplet tel que :

(34) $$a_k + b_{k+1} = a_{k+2} + b_{k+2} \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, n-2\},$$

cette condition étant supposée remplie si $n = 2$. Alors cette condition est aussi vérifiée par $\psi(\underline{a}, \underline{b}, c)$, et on a :

$$I(\underline{a}, \underline{b}, c) = I(\psi(\underline{a}, \underline{b}, c)).$$

N.B. En particulier, si $(\underline{a}, \underline{b}, c)$ est un tel triplet qui vérifie les conditions (33) alors $\psi(\underline{a}, \underline{b}, c)$ aussi.

N.B. L'hypothèse (34) signifie que $a_k + a_{k+1} + b_{k+1}$ ne dépend pas de $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Démonstration : Notons ψ l'application de $[0,1]^n$ dans lui-même qui à $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ associe $\psi(\underline{x}) = (X_1, \dots, X_n)$ défini par :

$$X_k = \frac{x_{n+1-k}\delta_{n-k}(\underline{x})}{\delta_{n+2-k}(\underline{x})} \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, n\}.$$

La relation (31) et les conventions $\delta_{n+1}(\underline{x}) = 1$ et $x_{n+1} = 0$ montrent qu'on a :

$$1 - X_k = \frac{(1 - x_{n+2-k})\delta_{n+1-k}(\underline{x})}{\delta_{n+2-k}(\underline{x})} \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, n\}.$$

En outre, on voit que

$$\delta_k(\psi(\underline{x})) = \delta_{n+1-k}(\underline{x}) \text{ pour tout } k \in \{0, \dots, n+1\}.$$

Il est alors immédiat de vérifier que ψ transforme l'intégrande de $I(\underline{a}, \underline{b}, c)$ en celle de $I(\psi(\underline{a}, \underline{b}, c))$. La condition (34) assure que les facteurs $\delta_2(\underline{x}), \dots, \delta_{n-1}(\underline{x})$ apparaissent avec un exposant nul. Pour conclure la démonstration de la proposition 11, il suffit de montrer que ψ laisse stable la forme différentielle ω, au signe près. Cela découle immédiatement de la relation

$$\text{(35)} \qquad \mathrm{d}\delta_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\delta_k = (-1)^k \delta_1(\underline{x}) \cdot \dots \cdot \delta_{k-1}(\underline{x}) \mathrm{d}x_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_k,$$

valable pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, et du lemme suivant (utilisé avec $k = n-1$), dans lequel on considère les δ_j, ainsi que les coordonnées X_1, ..., X_n de $\psi(\underline{x})$, comme des fonctions de $\underline{x}$:

Lemme 1. *Pour tout* $k \in \{0, \dots, n-1\}$ *on a :*

$$\delta_n(\underline{x})\delta_{n-1}(\underline{x}) \dots \delta_{n-k+1}(\underline{x}) \mathrm{d}X_n \wedge \dots \wedge \mathrm{d}X_1 \\ = (-1)^{k+1} \mathrm{d}X_n \wedge \dots \wedge \mathrm{d}X_{k+2} \wedge \mathrm{d}\delta_{n-k} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\delta_n.$$

Démonstration du lemme : Pour $k = 0$, cette formule provient de la relation $1 - X_1 = \delta_n(\underline{x})$. Supposons que cette formule est vraie pour un indice $k \in \{0, \dots, n-2\}$, et démontrons-la pour $k+1$. Les $n-k$ fonctions $X_n, \dots, X_{k+3}, \delta_{n-k}(\underline{x})X_{k+2}, \delta_{n-k-1}(\underline{x})$ ne dépendent que des $n-k-1$ variables $x_1, \dots, x_{n-k-1}$, donc on a :

$$\delta_{n-k}(\underline{x}) \mathrm{d}X_n \wedge \dots \wedge \mathrm{d}X_{k+2} \wedge \mathrm{d}\delta_{n-k-1} \\ = -X_{k+2} \mathrm{d}X_n \wedge \dots \wedge \mathrm{d}X_{k+3} \wedge \mathrm{d}\delta_{n-k} \wedge \mathrm{d}\delta_{n-k-1}.$$

En écrivant $\delta_{n-k-1}(\underline{x}) = 1 - X_{k+2}\delta_{n-k}(\underline{x})$, on en déduit :

$$\delta_{n-k}(\underline{x}) \mathrm{d}X_n \wedge \dots \wedge \mathrm{d}X_{k+2} \wedge \mathrm{d}\delta_{n-k} = -\mathrm{d}X_n \wedge \dots \wedge \mathrm{d}X_{k+3} \wedge \mathrm{d}\delta_{n-k-1} \wedge \mathrm{d}\delta_{n-k}.$$

Cette relation permet de terminer la démonstration du lemme par récurrence.

N.B. Ce changement de variables ψ est involutif, et préserve le facteur $\frac{\prod_{k=1}^n x_k(1-x_k)}{\delta_n(\underline{x})}$.

N.B. L'hypothèse (34) est nécessaire et suffisante pour que le changement de variables ψ transforme $I(\underline{a}, \underline{b}, c)$ en une intégrale de la même forme. Sans cette hypothèse, des facteurs $\delta_2(\underline{x}), \dots, \delta_{n-1}(\underline{x})$ apparaissent au dénominateur ; c'est ce qui conduit à introduire la famille plus générale étudiée dans la quatrième partie de ce texte.

Il est facile de calculer l'ordre de la transformation $\sigma \circ \psi$; on voit que c'est cinq si $n = 2$, et quatre si $n \geq 3$. Comme σ et ψ sont involutives, elles engendrent un groupe diédral d'ordre 10 ou 8 (respectivement). De plus, $\psi\sigma\psi$ est le changement de variables qui fixe les $n-1$ premières coordonnées et remplace x_n par $\frac{1-x_n}{\delta_n(\underline{x})}$. On retrouve ainsi, pour $n = 3$, le changement de variables utilisé par Beukers [2].

Proposition 12. *Notons φ l'automorphisme de $\mathbb{Z}^{2n+1}$ défini par :*

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(a_k) &= a_k \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, n-2\} \cup \{n\}, \\ \bar{\varphi}(b_k) &= b_k \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, n-2\}, \\ \bar{\varphi}(a_{n-1}) &= c, \\ \bar{\varphi}(b_{n-1}) &= b_{n-1} + a_{n-1} - c, \\ \bar{\varphi}(b_n) &= b_n + a_{n-1} - c, \\ \bar{\varphi}(c) &= a_{n-1}. \end{aligned}$$

Alors on a, pour tout $(\underline{a}, \underline{b}, c) \in \mathbb{Z}^{2n+1}$ qui vérifie les conditions (33) et tel que c et $a_{n-1} + b_{n-1} - c$ soient positifs :

$$I(\underline{a}, \underline{b}, c) = \frac{a_{n-1}!b_{n-1}!}{c!(a_{n-1} + b_{n-1} - c)!} I(\varphi(\underline{a}, \underline{b}, c)).$$

Démonstration : Supposons que les conditions (33) sont réalisées, et que c et $a_{n-1} + b_{n-1} - c$ sont positifs. On a pour tout $\beta \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1]$:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{x_{n-1}^{a_{n-1}}(1 - x_{n-1})^{b_{n-1}}}{(1 + \beta x_{n-1})^{c+1}} \mathrm{d}x_{n-1} \\ &\qquad = \frac{a_{n-1}!b_{n-1}!}{c!(a_{n-1} + b_{n-1} - c)!} \int_0^1 \frac{x_{n-1}^{c}(1 - x_{n-1})^{a_{n-1}+b_{n-1}-c}}{(1 + \beta x_{n-1})^{a_{n-1}+1}} \mathrm{d}x_{n-1}. \end{aligned}$$

Rhin et Viola déduisent ([8], troisième partie) cette formule de la représentation sous forme d'intégrale eulérienne de la fonction hypergéométrique de Gauss (ils l'utilisent si $|\beta| < 1$, mais elle est vraie pour toute valeur de $\beta \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1]$ par prolongement analytique). On peut aussi la démontrer par un changement de variables qui figure dans [5]. On utilise cette formule à $x_1, \dots, x_{n-2}, x_n$ fixés, avec $\beta = \frac{x_n \delta_{n-2}(\underline{x})}{1-x_n}$. On multiplie les deux membres par $x_n^{a_n}(1 - x_n)^{b_n - c - 1} \prod_{k=1}^{n-2} x_k^{a_k}(1 - x_k)^{b_k} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{n-2}\mathrm{d}x_n$ et on intègre de 0 à 1 par rapport à $x_1, \dots, x_{n-2}, x_n$, en remarquant qu'on a $(1 - x_n)(1 + \beta x_{n-1}) = \delta_n(\underline{x})$. Cela donne le résultat.

3.3. Action du groupe.

On souhaite faire agir sur une famille d'intégrales le sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2n+1}(\mathbb{Z})$ engendré par σ, ψ et φ. Pour cela, on suppose que $(\underline{a}, \underline{b}, c)$, ainsi que tous les éléments de son orbite sous l'action de ce sous-groupe, vérifient les conditions (34) de la proposition 11. Ceci revient à faire les hypothèses suivantes sur $(\underline{a}, \underline{b}, c)$:

$$\begin{aligned}
&\text{aucune hypothèse si } n = 2,\\
(36) \qquad &a_1 + b_2 = a_3 + b_3 \text{ si } n = 3,\\
&a_2 = b_1 \text{ et } b_n = c \text{ et } a_k + b_{k+1} = a_{k+2} + b_{k+2}\\
&\qquad\qquad \text{pour tout } k \in \{1, \dots, n-2\} \text{ si } n \geq 4.
\end{aligned}$$

Notons $\mathcal{E}$ le sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{Z}^{2n+1}$ formé par les $(2n+1)$-uplets vérifiant ces conditions. Il est de rang cinq si $n = 2$, six si $n = 3$, et $n+1$ si $n \geq 4$ (car les n relations qu'on impose si $n \geq 4$ sont indépendantes ; on peut le vérifier directement, mais cela sera démontré au paragraphe 3.4). Pour $(\underline{a}, \underline{b}, c) \in \mathcal{E}$, les conditions (33) de convergence se réduisent, si $n \geq 4$, aux conditions suivantes :

$$(37) \qquad a_k \geq 0 \text{ et } b_k \geq 0 \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Comme σ, ψ et φ laissent $\mathcal{E}$ stable, ils induisent des automorphismes de $\mathcal{E}$, encore notés σ, ψ et φ. On note G le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ engendré par ces trois automorphismes. On montre au paragraphe 3.4 que G est isomorphe à $(\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $n \geq 4$, et qu'on retrouve les situations considérées par Rhin et Viola si $n = 2$ ou $n = 3$. C'est pourquoi on suppose, dans la suite de ce paragraphe, qu'on a $n \geq 4$.

Notons $\mathcal{E}^+$ l'ensemble des $(\underline{a}, \underline{b}, c) \in \mathcal{E}$ dont tous les éléments de la G-orbite vérifient les conditions (37) de convergence. La discussion qui suit le théorème 5 montre que $(\underline{a}, \underline{b}, c)$ appartient à $\mathcal{E}^+$ si, et seulement si, l'ensemble suivant est formé de nombres positifs :

$$\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, a_{n-1} + b_{n-1} - c, a_{n-1} + b_{n-1} - a_n, a_2 + b_3 - b_2,\\
a_2 + b_3 - a_1\} \text{ si } n \geq 5,$$

$$\{a_1, \dots, a_4, b_1, \dots, b_4, a_3 + b_3 - c, a_3 + b_3 - a_4, a_2 + b_3 - b_2, a_2 + b_3 - a_1,\\
a_1 + a_2 - c, a_2 + b_2 - c, a_3 + c - b_2, a_3 + c - a_1\} \text{ si } n = 4.$$

À tout $(\underline{a}, \underline{b}, c) \in \mathcal{E}^+$ et à tout $g \in G$ on associe, si $n \geq 5$:

$$\xi(g; \underline{a}, \underline{b}, c) = \frac{a_{n-1}! a_2! b_{n-1}! b_3!}{(\bar{g}a_{n-1})!(\bar{g}a_2)!(\bar{g}b_{n-1})!(\bar{g}b_3)!}.$$

Si $n = 4$, on ne répète pas le facteur b_3, c'est-à-dire qu'on pose :

$$\xi(g; \underline{a}, \underline{b}, c) = \frac{a_3! a_2! b_3!}{(\bar{g}a_3)!(\bar{g}a_2)!(\bar{g}b_3)!}.$$

Théorème 5. *Pour tout* $(\underline{a}, \underline{b}, c) \in \mathcal{E}^+$ *et tout* $g \in G$ *on a (avec* $n \geq 4$*) :*

$$I(\underline{a}, \underline{b}, c) = \xi(g; \underline{a}, \underline{b}, c)\, I(g(\underline{a}, \underline{b}, c)).$$

Démonstration : Il suffit de constater que d'après les propositions 10, 11 et 12, le quotient $\frac{I(\underline{a},\underline{b},c)}{a_{n-1}!a_2!b_{n-1}!b_3!}$ est invariant (si $n \geq 5$) sous l'action de σ, ψ et φ. Si $n = 4$, il en est de même avec le quotient $\frac{I(\underline{a},\underline{b},c)}{a_3!a_2!b_3!}$.

Dans la suite de ce paragraphe, on omet les arguments $\underline{a}, \underline{b}, c$ de ξ.

Pour tout $\gamma \in \mathcal{D}_4$ et tout $g \in G$ on a $\xi(\gamma g) = \xi(g)$ car $\bar{\gamma}$ permute les facteurs du numérateur (par exemple au dénominateur de $\xi(\gamma g)$ on a $\overline{\gamma g}(a_{n-1}) = \overline{g}(\overline{\gamma}(a_{n-1}))$ qui est $\overline{g}(a_{n-1})$ ou $\overline{g}(a_2)$). Donc ξ est constant sur chaque classe de G modulo $\mathcal{D}_4$. On montre au paragraphe 3.4 que G est d'ordre 72 ; il y a donc 9 classes modulo $\mathcal{D}_4$. Les valeurs de ξ en ces 9 classes sont deux à deux distinctes (comme le prouvent les expressions ci-dessous), quand $\underline{a}, \underline{b}, c$ sont suffisamment généraux. Ceci montre que $\mathcal{D}_4$ est exactement l'ensemble des $\gamma \in G$ tels que $\xi(\gamma) = 1$ (pour $\underline{a}, \underline{b}, c$ génériques).

Quand $n \geq 5$, il y a une classe (modulo $\mathcal{D}_4$) de niveau 1, quatre de niveau 2 et quatre de niveau 4 :

$$\begin{aligned}
\xi(\mathrm{Id}) &= 1,\\
\xi(\varphi) &= \frac{a_{n-1}!b_{n-1}!}{c!(a_{n-1}+b_{n-1}-c)!},\\
\xi(\varphi\psi) &= \frac{a_2!b_3!}{b_2!(a_2+b_3-b_2)!},\\
\xi(\varphi\psi\sigma) &= \frac{a_2!b_3!}{a_1!(a_2+b_3-a_1)!},\\
\xi(\varphi\psi\sigma\psi) &= \frac{a_{n-1}!b_{n-1}!}{a_n!(a_{n-1}+b_{n-1}-a_n)!},\\
\xi(\varphi\psi\varphi) &= \frac{a_{n-1}!a_2!b_{n-1}!b_3!}{b_2!c!(a_2+b_3-b_2)!(a_{n-1}+b_{n-1}-c)!},\\
\xi(\varphi\psi\varphi\sigma) &= \frac{a_{n-1}!a_2!b_{n-1}!b_3!}{a_1!c!(a_2+b_3-a_1)!(a_{n-1}+b_{n-1}-c)!},\\
\xi(\varphi\psi\varphi\sigma\psi) &= \frac{a_{n-1}!a_2!b_{n-1}!b_3!}{a_n!b_2!(a_{n-1}+b_{n-1}-a_n)!(a_2+b_3-b_2)!},\\
\xi(\varphi\psi\varphi\sigma\psi\sigma) &= \frac{a_{n-1}!a_2!b_{n-1}!b_3!}{a_n!a_1!(a_{n-1}+b_{n-1}-a_n)!(a_2+b_3-a_1)!}.
\end{aligned}$$

Quand $n = 4$, il y a une classe (modulo $\mathcal{D}_4$) de niveau 1, quatre de niveau 2 et quatre de niveau 3 :

$$\begin{aligned}
\xi(\mathrm{Id}) &= 1,\\
\xi(\varphi) &= \frac{a_3!b_3!}{c!(a_3+b_3-c)!},
\end{aligned}$$

$$\xi(\varphi\psi) = \frac{a_2!b_3!}{b_2!(a_2+b_3-b_2)!},$$
$$\xi(\varphi\psi\sigma) = \frac{a_2!b_3!}{a_1!(a_2+b_3-a_1)!},$$
$$\xi(\varphi\psi\sigma\psi) = \frac{a_3!b_3!}{a_4!(a_3+b_3-a_4)!},$$
$$\xi(\varphi\psi\varphi) = \frac{a_3!a_2!b_3!}{b_2!c!(a_1+a_2-c)!},$$
$$\xi(\varphi\psi\varphi\sigma) = \frac{a_3!a_2!b_3!}{a_1!c!(a_2+b_2-c)!},$$
$$\xi(\varphi\psi\varphi\sigma\psi) = \frac{a_3!a_2!b_3!}{a_4!b_2!(a_3+c-b_2)!},$$
$$\xi(\varphi\psi\varphi\sigma\psi\sigma) = \frac{a_3!a_2!b_3!}{a_4!a_1!(a_3+c-a_1)!}.$$

Les propriétés de ξ sont les mêmes que dans [8] et [9] (on suppose que les paramètres $\underline{a}, \underline{b}, c$ sont génériques) :

– Pour chaque $g \in G$, le numérateur et le dénominateur de $\xi(g)$ sont le produit d'un même nombre de factorielles, appelé *niveau* de g.
– La somme des entiers dont les factorielles apparaissent au numérateur est égale à celle des entiers dont les factorielles apparaissent au dénominateur.
– Les entiers dont les factorielles apparaissent au numérateur appartiennent aux $\mathcal{D}_4$-orbites de a_{n-1} et b_{n-1}. Ceux dont les factorielles apparaissent au dénominateur appartiennent aux G-orbites de a_{n-1} et b_{n-1}, mais pas à leurs $\mathcal{D}_4$-orbites.

Une différence par rapport aux cas $n = 2$ et $n = 3$ est que pour $n \geq 4$ les G-orbites de a_{n-1} et b_{n-1} sont distinctes. En outre, pour $n = 2$ et $n = 3$ la G-orbite de a_{n-1} est la réunion de deux orbites de même cardinal sous l'action du groupe diédral associé, alors qu'ici la situation est plus compliquée. Pour $n \geq 4$, la G-orbite de a_{n-1} est de cardinal 6, et se scinde en deux $\mathcal{D}_4$-orbites : l'une de cardinal 2 (formée de a_{n-1} et a_2), l'autre de cardinal 4 (formée de c, b_2, a_1, a_n). Si $n \geq 5$, la G-orbite de b_{n-1} est aussi de cardinal 6, et se scinde également en deux $\mathcal{D}_4$-orbites : l'une de cardinal 2 (formée de b_{n-1} et b_3), l'autre de cardinal 4 (formée de $a_{n-1} + b_{n-1} - c, a_2 + b_3 - b_2, a_2 + b_3 - a_1, a_{n-1} + b_{n-1} - a_n$).

Quand $n = 4$, la G-orbite de b_3 est de cardinal 9, et se scinde en trois $\mathcal{D}_4$-orbites : l'une est réduite à b_3, et les deux autres sont de cardinal 4, formées respectivement de $a_3 + b_3 - c, a_2 + b_3 - b_2, a_2 + b_3 - a_1, a_3 + b_3 - a_4$ et de $a_1 + a_2 - c, a_2 + b_2 - c, a_3 + c - b_2, a_3 + c - a_1$.

3.4. Structure du groupe G.

Dans ce paragraphe, on étudie la structure du groupe G défini au paragraphe précédent. Pour $n = 2$ et $n = 3$, on retrouve exactement les situations considérées par Rhin et Viola. Pour $n \geq 4$, on détermine la structure de G en le faisant agir par permutation des coordonnées sur une variété (dans le même esprit que dans les deux premières parties de ce texte).

Théorème 6. *Le groupe G est un groupe fini, isomorphe :*
- *à $\mathfrak{S}_5$ si $n = 2$, donc d'ordre 120 ;*
- *à $H \rtimes \mathfrak{S}_5$ si $n = 3$, donc d'ordre 1920 (on note H l'hyperplan d'équation $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_5 = 0$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^5$) ;*
- *à $(\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $n \geq 4$, donc d'ordre 72 (on fait agir $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$ par permutation des deux facteurs).*

N.B. Pour les applications arithmétiques, ce qui compte est l'indice dans G du sous-groupe formé par les $g \in G$ tels que $\xi(g; \underline{a}, \underline{b}, c) = 1$ pour tout $(\underline{a}, \underline{b}, c) \in \mathcal{E}^+$. Cet indice vaut 12 si $n = 2$, 120 si $n = 3$ et 9 si $n \geq 4$ (d'après le paragraphe précédent).

La suite de ce paragraphe est consacrée à la démonstration du théorème 6, et à une étude un peu plus détaillée de chacun de ces trois cas.

Dans le cas $n = 2$, posons $x = x_2$ et $y = 1 - x_1$. Alors la transformation σ est exactement celle de [8], et ψ correspond, avec les notations de [8], à $\tau \circ \sigma$ (i.e. $\bar{\psi} = \bar{\sigma}\bar{\tau}$, où $\bar{\tau}$ est le τ en caractères gras de [8]). Donc le groupe engendré par ψ et σ est le même que celui engendré par τ et σ ; il est isomorphe au groupe diédral $\mathcal{D}_5$. Quant à la transformation hypergéométrique, celle notée φ dans [8] correspond au cas particulier $n = 2$ de la transformation χ_L définie dans la proposition 15 (voir le paragraphe 4.2). Alors que cette transformation $\bar{\varphi}$ échange $\alpha_2 = i + j$ et $\alpha_5 = l + h$ en fixant α_1, α_3 et α_4, le cas particulier $n = 2$ de la transformation $\bar{\varphi}$ de la proposition 12 échange $\alpha_1 = h + i$ et α_5 en fixant α_2, α_3 et α_4. Mais le groupe engendré par $\mathcal{D}_5$ et φ reste le même ; il est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$. Plus précisément $\mathcal{D}_5 \varphi \mathcal{D}_5$ est le même, car ces deux transformations φ sont de niveau 2. Par ailleurs, les conditions (36) sont vides quand $n = 2$: on retrouve exactement la situation considérée par Rhin et Viola.

Dans le cas $n = 3$, posons $x = x_2$, $y = 1 - x_1$ et $z = x_3$. Alors les transformations σ et φ sont exactement celles de [9], et ψ correspond, avec les notations de [9], à $\vartheta^2 \circ \sigma$ (ce qui signifie que $\bar{\psi} = \bar{\sigma}\bar{\vartheta}^2$). Le groupe engendré par ψ et σ est donc le même que celui engendré par σ et ϑ^2 ; il est isomorphe au groupe du carré $\mathcal{D}_4$. Le groupe $G = < \sigma, \psi, \varphi >$ est donc égal au sous-groupe de $\Phi = < \sigma, \vartheta, \varphi >$ engendré par σ, ϑ^2 et φ. Or on remarque

que ce sous-groupe est Φ tout entier, car $\vartheta \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ est donné par

$$\vartheta = (\varphi\sigma\psi\sigma\varphi\sigma)^2\varphi, \text{ c'est-à-dire } \bar{\vartheta} = \bar{\varphi}(\bar{\sigma}\bar{\varphi}\bar{\sigma}\bar{\psi}\bar{\sigma}\bar{\varphi})^2, \tag{38}$$

où $\bar{\vartheta}$ est l'application notée ϑ en caractères gras dans [9]. Ainsi, G est isomorphe à Φ, donc à $H \rtimes \mathfrak{S}_5$ (voir le paragraphe 2.4 ci-dessus).

De plus, quand $n = 3$, la contrainte (36) est exactement l'hypothèse $j + q = l + s$ de [9]. On obtient donc exactement la situation considérée par Rhin et Viola, à une exception près : le groupe diédral engendré par σ et ψ est d'ordre 8, alors que celui engendré par σ et ϑ est d'ordre 16. Avec la présentation adoptée ici, il n'est pas clair a priori que l'élément $\vartheta \in G$ défini par (38) provienne d'un changement de variables. On peut cependant s'en douter en calculant $\xi(\vartheta; \underline{a}, \underline{b}, c)$ et en voyant que c'est 1 quels que soient $\underline{a}, \underline{b}, c$; il est alors facile par identification de trouver le changement de variables en question.

Cette ambiguïté sur le groupe diédral n'apparaît ni pour $n = 2$, ni pour $n \geq 4$. En effet, dans ce dernier cas, on a montré au paragraphe 3.3 que $\mathcal{D}_4 = < \sigma, \psi >$ est exactement l'ensemble des $g \in G$ tels que $\xi(g; \underline{a}, \underline{b}, c) = 1$ pour tous $\underline{a}, \underline{b}, c$.

On aimerait obtenir un groupe dont la structure soit de plus en plus riche quand n augmente ; ici, le théorème 6 montre qu'on n'y parvient pas. Pour enrichir cette structure, il faudrait probablement chercher du côté de la transformation hypergéométrique. En effet, on utilise seulement une formule en une variable x_k, et cette formule n'est valable que si un seul facteur du dénominateur dépend de x_k :

$$\int_0^1 \frac{x_k^a(1-x_k)^b}{(1+\beta x_k)^c} \frac{\mathrm{d}x_k}{(1+\beta x_k)} = \frac{a!b!}{c!(a+b-c)!} \int_0^1 \frac{x_k^c(1-x_k)^{a+b-c}}{(1+\beta x_k)^a} \frac{\mathrm{d}x_k}{(1+\beta x_k)}.$$

Une formule analogue, dans laquelle le dénominateur serait un produit de plusieurs facteurs distincts, pourrait être appliquée à x_k pour d'autres valeurs de k que $k = n - 1$ (qui donne φ à la proposition 12) et $k = n$ (qui donne χ_L et χ_K, voir les propositions 15 et 18). Elle permettrait aussi d'obtenir un analogue de φ, c'est-à-dire une transformation hypergéométrique par rapport à la variable x_{n-1}, pour les intégrales considérées dans les quatrième et cinquième parties de ce texte.

Une autre direction est de chercher quelles contraintes on met sur les paramètres : plus on met de contraintes et plus on a de chances que le groupe de transformations obtenu soit gros, mais moins l'étude de la valuation p-adique des $\xi(g; \underline{a}, \underline{b}, c)$ fournira d'informations. Par exemple, si on considère uniquement le cas où les $2n + 1$ exposants sont égaux, alors les transformations σ, ψ et φ sont triviales (voir aussi la remarque qui suit la proposition 15).

Il y a peut-être une direction dans laquelle le présent travail a une chance d'être exhaustif : c'est la recherche de changements de variables qui préservent la forme de l'intégrale. Précisément, on peut espérer une réponse positive aux questions suivantes :

Question : Soit $g \in \mathrm{GL}(\mathbb{Z}^{2n+1})$ tel que

$$I(\underline{a}, \underline{b}, c) = I(g(\underline{a}, \underline{b}, c))$$

pour tout $(\underline{a}, \underline{b}, c) \in \mathbb{Z}^{2n+1}$. A-t-on nécessairement $g = \mathrm{Id}$ ou $g = \sigma$, lorsque $n \geq 3$? Quand $n = 2$, g appartient-il nécessairement au sous-groupe (d'ordre huit) engendré par ψ et σ ?

Question : Soit g un élément de $\mathrm{GL}(\mathbb{Z}^{2n+1})$ qui vérifie

$$I(\underline{a}, \underline{b}, c) = I(g(\underline{a}, \underline{b}, c))$$

pour tout $(\underline{a}, \underline{b}, c) \in \mathbb{Z}^{2n+1}$ tel que

$$a_k + b_{k+1} = a_{k+2} + b_{k+2} \text{ pour tout } k \in \{1, \ldots, n-2\}.$$

Lorsque $n \neq 3$, g appartient-il nécessairement au sous-groupe (d'ordre huit) engendré par ψ et σ ? Quand $n = 3$, appartient-il nécessairement au sous-groupe (d'ordre seize) engendré par ϑ et σ ?

N.B. Si on restreint ces questions aux éléments $g \in G$, la réponse est positive puisque la contrainte sur g implique $\xi(g; \underline{a}, \underline{b}, c) = 1$ pour tout $(\underline{a}, \underline{b}, c) \in \mathcal{E}^+$.

Considérons, dans toute la suite de ce paragraphe, le cas $n \geq 4$.

Soit $(\underline{a}, \underline{b}, c)$ un $(2n+1)$-uplet vérifiant les conditions (36). On pose $\nu_\infty = \frac{2}{3}(a_k + a_{k+1} + b_{k+1})$ pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$; cette valeur ne dépend pas du choix de k. On pose aussi :

$$\begin{aligned}
\nu_0 &= a_1 + a_2 - \nu_\infty = a_1 + b_1 - \nu_\infty, \\
\nu_1 &= a_2 + b_2 - \nu_\infty = b_1 + b_2 - \nu_\infty, \\
\nu_k &= a_{k-1} + b_k - \nu_\infty = a_{k+1} + b_{k+1} - \nu_\infty \text{ pour tout } k \in \{2, \ldots, n-1\}, \\
\nu_n &= a_{n-1} + b_n - \nu_\infty, \\
\nu_{n+1} &= a_{n-1} + a_n - \nu_\infty.
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\nu_0 + \nu_1 + \nu_2 = \nu_{n-1} + \nu_n + \nu_{n+1} = 0. \tag{39}$$

Réciproquement, tout $(n+3)$-uplet $(\nu_0, \ldots, \nu_{n+1}, \nu_\infty)$ qui vérifie les relations (39) provient d'un $(2n+1)$-uplet $(\underline{a}, \underline{b}, c)$ qui vérifie les conditions (36), puisqu'on a :

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{2}\nu_\infty - \nu_k \text{ pour tout } k \in \{1,\ldots,n\},\\
b_k &= \nu_{k-1} + \nu_k + \frac{1}{2}\nu_\infty \text{ pour tout } k \in \{1,\ldots,n\},\\
c = b_n &= \nu_{n-1} + \nu_n + \frac{1}{2}\nu_\infty = -\nu_{n+1} + \frac{1}{2}\nu_\infty.
\end{aligned}
$$

En outre, les conditions (37) s'écrivent :

$$
\begin{aligned}
&& \nu_\infty \geq 2\nu_k \quad & \text{pour tout } k \in \{1,\ldots,n\},\\
\text{et} && \nu_\infty + 2\nu_k + 2\nu_{k-1} \geq 0 \quad & \text{pour tout } k \in \{1,\ldots,n\}.
\end{aligned}
$$

L'isomorphisme ci-dessus entre le sous-$\mathbb{Z}$-module $\mathcal{E}$ de $\mathbb{Z}^{2n+1}$ défini par les équations (36) et le sous-$\mathbb{Z}$-module $\mathcal{F}$ de $\mathbb{Z}^{n+3}$ défini par les équations (39) montre que $\mathcal{E}$ est de rang $n+1$. De plus, il permet d'identifier $\mathrm{GL}(\mathcal{E})$ et $\mathrm{GL}(\mathcal{F})$. On peut expliciter l'action de G sur $\mathcal{F}$ ainsi obtenue : $\bar\sigma$ fixe chaque composante, sauf ν_0 et ν_1 qu'elle échange ; $\bar\psi$ échange ν_k et ν_{n+1-k} pour tout $k \in \{0,\ldots,n+1\}$, et fixe ν_∞ ; $\bar\varphi$ fixe ν_k pour tout $k \in \{0,\ldots,n-2\} \cup \{n,\infty\}$ et échange ν_{n-1} et ν_{n+1}. On peut résumer cela par le diagramme suivant, dans lequel $\bar\psi$ est la symétrie par rapport à la droite verticale :

$$
\begin{array}{ccccc|cccccc}
\nu_2 & \cdots & \cdots & \nu_k & \cdots & \cdots & \nu_{n+1-k} & \cdots & \cdots & \nu_{n-1} \\
 & & & & & & & & & \updownarrow \bar\varphi \\
\nu_0 & \overset{\bar\sigma}{\longleftrightarrow} & \nu_1 & & & & & \nu_n & & \nu_{n+1}
\end{array}
$$

Tout élément $\gamma \in G$ induit une permutation de l'ensemble formé par les deux triangles $\{\nu_0,\nu_1,\nu_2\}$ et $\{\nu_{n-1},\nu_n,\nu_{n+1}\}$. On définit ainsi un homomorphisme de groupes surjectif de G dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Son noyau contient entre autres $\bar\sigma$, $\bar\varphi$, $\bar\psi\bar\sigma\bar\psi$ et $\bar\psi\bar\varphi\bar\psi$: il est isomorphe au groupe $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$ des permutations de l'ensemble à six éléments $\{\nu_0,\nu_1,\nu_2,\nu_{n-1},\nu_n,\nu_{n+1}\}$ qui laissent stables les deux parties $\{\nu_0,\nu_1,\nu_2\}$ et $\{\nu_{n-1},\nu_n,\nu_{n+1}\}$. Le groupe G se plonge ainsi dans $\mathfrak{S}_6$, et on voit qu'il est isomorphe à $(\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le sous-groupe de G engendré par σ et ψ est isomorphe au groupe diédral d'ordre 8 ; il agit sur le carré dont les sommets sont $\nu_0,\nu_n,\nu_1,\nu_{n+1}$ (dans cet ordre). On voit ainsi que $\bar\sigma\bar\psi = \overline{\psi\sigma}$ est d'ordre 4, comme le changement de variables dont il provient.

Les exposants ν_k introduits ici sont à rapprocher des paramètres $h_0,\ldots,h_{n+2}$ utilisés par Zudilin [19]. Le lien est le suivant :

$$
\nu_\infty = \frac{2}{3}(h_0 - 2) \text{ et } \nu_k = \frac{h_0+1}{3} - h_{n+2-k} \text{ pour tout } k \in \{0,\ldots,n+1\}.
$$

Il y a toutefois une différence importante : ici, on considère seulement des triplets $(\underline{a}, \underline{b}, c)$ qui appartiennent à $\mathcal{E}$. Cela signifie qu'à la condition

$$a_k + b_{k+1} = a_{k+2} + b_{k+2} \text{ pour tout } k \in \{1, \ldots, n-2\} \tag{40}$$

qui apparaît chez Zudilin on adjoint (si $n \geq 4$) les hypothèses $a_2 = b_1$ et $b_n = c$.

Par une méthode assez différente de celle utilisée ici, Zudilin obtient [19] un groupe de Rhin-Viola, isomorphe à $\mathfrak{S}_{n+2}$, qui agit sur l'ensemble des paramètres $(\underline{a}, \underline{b}, c)$ vérifiant (40). Il constate que pour $n \geq 4$ ce groupe ne contient pas d'analogue de la transformation σ qui échange x et y. Ici, les restrictions supplémentaires $a_2 = b_1$ et $b_n = c$ (qui se traduisent par la relation (39)) permettent d'obtenir cette transformation σ. En utilisant les résultats de Zudilin, on voit que la famille $I(\underline{a}, \underline{b}, c)$, paramétrée par $(\underline{a}, \underline{b}, c) \in \mathcal{E}$, admet (si $n \geq 4$) un groupe de Rhin-Viola G' isomorphe à $((\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \mathfrak{S}_{n-4}$. Ceci améliore notre théorème 6 si $n \geq 6$. Ce groupe G' fixe ν_∞, agit sur $\{\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_{n-1}, \nu_n, \nu_{n+1}\}$ comme G et sur $\{\nu_3, \ldots, \nu_{n-2}\}$ par toutes les permutations de $\nu_3, \ldots, \nu_{n-2}$. Les éléments $g' \in G'$ tels que $I(\underline{a}, \underline{b}, c) = I(g'(\underline{a}, \underline{b}, c))$ pour tout $(\underline{a}, \underline{b}, c) \in \mathcal{E}$ appartiennent à G : ce sont les éléments du sous-groupe engendré par ψ et σ.

Question : Peut-on démontrer que G' est un groupe de Rhin-Viola pour la famille $I(\underline{a}, \underline{b}, c)$ paramétrée par $\mathcal{E}$ en s'inspirant de la méthode utilisée dans les deux premières parties ?

Pour répondre à cette question, la première étape est de considérer les coordonnées suivantes, qui sont permutées par G' :

$$\begin{aligned}
y_0 &= \varepsilon \frac{x_1(1-x_1)x_2}{1-x_2}, \\
y_1 &= \varepsilon \frac{(1-x_1)x_2(1-x_2)}{x_1}, \\
y_2 &= \varepsilon \frac{x_1(1-x_2)(1-x_3)^2}{(1-x_1)x_2}, \\
y_k &= \frac{(1-x_k)(1-x_{k+1})}{x_k} \text{ pour tout } k \in \{3, \ldots, n-2\}, \\
y_{n-1} &= \eta \frac{x_n(1-x_n)(1-x_{n-1})^2}{x_{n-1}} \frac{\delta_{n-2}(\underline{x})}{\delta_n(\underline{x})}, \\
y_n &= \eta \frac{x_{n-1}(1-x_n)}{x_n} \frac{\delta_{n-2}(\underline{x})}{\delta_n(\underline{x})},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= \eta \frac{x_{n-1}x_n}{1-x_n}\delta_{n-2}(\underline{x})\delta_n(\underline{x}),\\
y_\infty &= \delta_n(\underline{x})^{-1}\prod_{k=1}^{n} x_k(1-x_k),
\end{aligned}
$$

$$
\text{avec} \qquad \varepsilon = (x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)(1-x_3)^2)^{-1/3}
$$

$$
\text{et} \qquad \eta = (\frac{\delta_{n-2}(\underline{x})^3}{\delta_n(\underline{x})} x_{n-1}(1-x_{n-1})^2 x_n(1-x_n))^{-1/3}.
$$

Notons Ω l'ensemble des points $(y_0,\ldots,y_{n+1},y_\infty)\in\mathbb{R}^{n+3}$ ainsi obtenus quand $(x_1,\ldots,x_n)$ décrit $]0,1[^n$, et $\mathcal{V}$ l'adhérence de Zariski de Ω. Alors $\mathcal{V}$ est incluse dans les hypersurfaces d'équations $y_0y_1y_2=1$ et $y_{n-1}y_ny_{n+1}=1$ (c'est le rôle des facteurs ε et η dans les formules ci-dessus). Le groupe du carré (engendré par $\bar\sigma$ et $\bar\psi$) agit sur Ω (donc sur $\mathcal{V}$) en permutant les coordonnées : $\bar\sigma$ échange y_0 et y_1, alors que $\bar\psi$ échange y_k et y_{n+1-k} pour tout $k\in\{0,\ldots,n+1\}$. En outre, l'intégrande de $I(\underline{a},\underline{b},c)$ apparaît comme un monôme en les $n+3$ coordonnées en posant $\alpha_k=\frac{1}{2}\nu_k$ pour $k\in\{0,1,2,n-1,n,n+1,\infty\}$ et $\alpha_k=\nu_k$ pour $k\in\{3,\ldots,n-2\}$, car on a :

$$
\delta_n(\underline{x})^{-c}\prod_{k=1}^{n} x_k^{a_k}(1-x_k)^{b_k} = y_\infty^{\alpha_\infty}\prod_{k=0}^{n+1} y_k^{\alpha_k}.
$$

La variable y_∞ joue ici le même rôle que ε_6 dans la partie 2 : elle correspond au facteur $\frac{\prod_{k=1}^{n} x_k(1-x_k)}{\delta_n(\underline{x})}$, sur lequel le groupe agit trivialement.

3.5. Aspects arithmétiques.

Dans le cas $n=3$, la contrainte $j+q=l+s$ qui est imposée dans [9] pour obtenir une action intéressante de groupe permet d'obtenir des formes linéaires en 1 et $\zeta(3)$, alors que sans cette hypothèse $\zeta(2)$ peut aussi apparaître (voir [9], page 276). Le théorème suivant [19] montre qu'il s'agit d'un fait général ; ceci démontre partiellement une conjecture de [15], et répond à une question posée dans [6].

Théorème 7. *Soit $(\underline{a},\underline{b},c)$ un $(2n+1)$-uplet d'entiers relatifs vérifiant les conditions (33) de convergence, et les conditions (34) de la proposition 11. Alors $I(\underline{a},\underline{b},c)$ est une combinaison linéaire, à coefficients rationnels, de 1 et des $\zeta(j)$ pour j entier, compris entre 2 et n, ayant la même parité que n.*

En particulier ce théorème s'applique aux éléments de $\mathcal{E}$, sous réserve que les conditions de convergence soient vérifiées.

4. Une famille plus générale d'intégrales n-uples

Soient $\underline{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ et $\underline{b}=(b_1,\ldots,b_n)$ deux n-uplets d'entiers relatifs, et soit $\underline{c}=(c_2,\ldots,c_n)$ un $(n-1)$-uplet d'entiers relatifs.

Comme dans la partie précédente, on note $\delta_k(\underline{x}) = 1 - x_k(1 - x_{k-1}(\ldots(1 - x_1)))$ pour $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$. On considère les intégrales suivantes, qui sont positives et éventuellement infinies :

$$L(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = \int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{k=1}^n x_k^{a_k}(1-x_k)^{b_k}}{\prod_{k=2}^n \delta_k(\underline{x})^{c_k}} \frac{\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n}{\delta_n(\underline{x})}.$$

4.1. Convergence.

Aux paramètres $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ on associe des entiers $\varrho_1, \ldots, \varrho_{n+2}$ de la manière suivante. On pose $\varrho_{n+2} = \varrho_{n+1} = 0$, $\varrho_n = c_n - b_n$ et pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$:

$$\varrho_k = \varrho_{k+2}^+ + c_k - 1 - b_k,$$

en notant $\alpha^+ = \max(\alpha, 0)$ et avec la convention $c_1 = 1$. On note aussi $\tilde{c}_i = c_i$ pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ et $\tilde{c}_n = c_n + 1$.

Dans ce paragraphe uniquement, on autorise l'entier n à valoir 1. Dans ce cas, on pose $\varrho_1 = -b_1$ et $\varrho_2 = \varrho_3 = 0$.

Proposition 13. *L'intégrale $L(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ converge si, et seulement si, les a_k et les b_k sont tous positifs ou nuls, et qu'on a pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, avec la convention $a_0 = 0$:*

$$\varrho_k \leq a_{k-1}.$$

N.B. On n'utilisera donc l'intégrale $L(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ que quand les a_k et les b_k sont tous positifs ou nuls ; en revanche, on a intérêt à autoriser les c_k à être éventuellement négatifs, c'est-à-dire à ne pas développer une puissance de $\delta_k(\underline{x})$ qui figurerait au numérateur. En effet, dans certains cas, cela reviendrait à écrire une intégrale convergente comme somme d'intégrales divergentes.

Démonstration : La convergence de l'intégrale résulte des deux lemmes ci-dessous. Montrons la réciproque. Tout d'abord, s'il existe k tel que $a_k \leq -1$ (respectivement $b_k \leq -1$) alors pour $\varepsilon > 0$ assez petit on restreint l'intégrale au domaine défini par $x_k \in [0, \varepsilon]$ (resp. $x_k \in [1-\varepsilon, 1]$) et $x_j \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ pour tout $j \neq k$. Sur ce domaine, on a $\delta_p(\underline{x}) \in [\frac{1}{9}, 1]$ pour tout $p \geq 2$, donc l'intégrale est déjà infinie. Supposons à partir de maintenant que les a_k et les b_k sont tous positifs ou nuls, et qu'il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\varrho_k \geq 1 + a_{k-1}$. Dans un premier temps, supposons $k \geq 2$. Notons p le plus petit entier naturel pair tel que $\varrho_{k+p} \leq 0$. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit. Restreignons-nous au domaine défini par les contraintes $x_{k-1} \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$, $x_k, x_{k+2}, x_{k+4}, \ldots, x_{k+p-2} \in [1-2\varepsilon, 1-\varepsilon]$, et $x_i \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ pour les autres indices i. Dans ce domaine, on a $\delta_{k-1}(\underline{x}) \geq 1 - 2\varepsilon$ d'où $\delta_i(\underline{x}) \leq c\varepsilon$ pour tout $i \in \{k, k+2, k+4, \ldots, k+p-2\}$ avec une certaine constante $c > 0$ indépendante de ε. Par ailleurs, on a $\frac{1}{3} \leq \delta_i(\underline{x}) \leq 1$ pour tout $i \notin \{k, k+2, k+4, \ldots, k+p-2\}$. L'intégrale sur ce domaine est donc minorée, à une constante multiplicative près (indépendante de ε), par ε à la puissance $a_{k-1} + 1 + \sum_{j=0}^{(p-2)/2}(b_{k+2j} + 1 - \tilde{c}_{k+2j})$, qui vaut

$a_{k-1}+1-\varrho_k \leq 0$ (par définition de k et p). Comme ce minorant ne tend pas vers zéro quand ε tend vers 0, l'intégrale $L(\underline{a},\underline{b},\underline{c})$ diverge. Dans le cas où $k=1$, on procède de même, en omettant la contrainte sur x_{k-1} et en utilisant la convention $c_1=1$ qui apparaît dans la définition de ϱ_1.

Lemme 2. *Supposons que les a_k et les b_k sont tous positifs ou nuls, et qu'on a $\varrho_k \leq a_{k-1}$ pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, avec la convention $a_0=0$. Alors la fonction $\xi_n(\underline{a},\underline{b},\underline{c})$ définie par*

$$\xi_n(\underline{a},\underline{b},\underline{c})(\underline{x}) = \frac{\prod_{k=1}^n x_k^{a_k}(1-x_k)^{b_k}}{\prod_{k=2}^n \delta_k(\underline{x})^{\tilde{c}_k-1}}$$

est bornée sur $[0,1]^n$.

Démonstration : Ce résultat est vrai pour $n=1$. Soit $n \geq 2$ tel que le lemme soit vrai pour $n-1$. On peut supposer $\tilde{c}_n \geq 2$. On a $\delta_n(\underline{x}) \geq 1-x_n$ et $\delta_n(\underline{x}) = 1-x_n+x_nx_{n-1}\delta_{n-2}(\underline{x}) \geq x_{n-1}\delta_{n-2}(\underline{x})$, d'où :

$$\delta_n(\underline{x})^{\tilde{c}_n-1} \geq (1-x_n)^{\min(b_n,c_n)}(x_{n-1}\delta_{n-2}(\underline{x}))^{(c_n-b_n)^+}.$$

On en déduit :

$$\xi_n(\underline{a},\underline{b},\underline{c})(\underline{x}) \leq x_n^{a_n}(1-x_n)^{b_n-\min(b_n,c_n)}\xi_{n-1}(\underline{a'},\underline{b'},\underline{c'})(x_1,\dots,x_{n-1}),$$

en posant :

$$\begin{aligned}
a'_k &= a_k \text{ pour tout } k \in \{1,\dots,n-2\},\\
a'_{n-1} &= a_{n-1}-(c_n-b_n)^+,\\
b'_k &= b_k \text{ pour tout } k \in \{1,\dots,n-1\},\\
c'_k &= c_k \text{ pour tout } k \in \{2,\dots,n-3\},\\
c'_{n-2} &= c_{n-2}+(c_n-b_n)^+ \text{ si } n \geq 4,\\
c'_{n-1} &= c_{n-1}-1 \text{ si } n \geq 3.
\end{aligned}$$

On a alors $\varrho'_k = \varrho_k$ pour tout $k \in \{1,\dots,n-1\}$: par récurrence, $\xi_{n-1}(\underline{a'},\underline{b'},\underline{c'})$ est donc bornée. Comme on a $\xi_n(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) \leq \xi_{n-1}(\underline{a'},\underline{b'},\underline{c'})$, cela termine la démonstration du lemme.

Lemme 3. *Pour tout entier $p \geq 0$, l'intégrale $\int_{[0,1]^n} \frac{(-\log(\delta_n(\underline{x})))^p \mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_n}{\prod_{k=2}^n \delta_k(\underline{x})}$ est convergente.*

Démonstration : On procède par récurrence sur n ; le cas $n=1$ est clair. Supposons le résultat vrai jusqu'à $n-1$, avec $n \geq 2$. Alors il suffit de montrer que $\int_{[0,1]^n} \frac{(-\log(\delta_n(\underline{x})))^p \mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_n}{\prod_{k\equiv n \mod 2} \delta_k(\underline{x})}$ converge, car là où $\delta_n(\underline{x})$ est proche de 0 les $\delta_k(\underline{x})$, pour $k \not\equiv n \mod 2$, sont minorés par une constante strictement positive. On découpe le domaine d'intégration en deux. Là où $1-x_n \leq x_{n-1}\delta_{n-2}(\underline{x})$, on écrit $\delta_n(\underline{x}) = (1-x_n)+x_nx_{n-1}\delta_{n-2}(\underline{x}) \geq x_nx_{n-1}\delta_{n-2}(\underline{x})$ ce qui permet de majorer $(-\log(\delta_n(\underline{x})))^p$ par une combinaison linéaire de termes de la forme $(-\log(\delta_{n-2}(\underline{x})))^{p_1}(-\log(x_{n-1}))^{p_2}(-\log(x_n))^{p_3}$. Comme le problème de convergence se pose quand x_n est proche de 1, on peut supposer que $\frac{(-\log(x_n))^{p_3}}{x_n}$ est majoré par une constante ; on en déduit immédiatement le résultat. Dans le reste de l'hypercube, on a $1-x_n > x_{n-1}\delta_{n-2}(\underline{x})$, et on écrit $\delta_n(\underline{x}) \geq 1-x_n$. Cette fois, on majore $\int_0^{1-x_{n-1}\delta_{n-2}(\underline{x})} \frac{(-\log(1-x_n))^p}{1-x_n}\mathrm{d}x_n$ par $(-\log(x_{n-1}\delta_{n-2}(\underline{x})))^{p+1}$, et on conclut de manière analogue.

4.2. Définition des transformations.

Notons σ_L et ψ_L les automorphismes de $\mathbb{Z}^{3n-1}$ définis comme suit : $\overline{\sigma_L}$ échange a_1 et b_2, ainsi que a_2 et b_1, et fixe les autres coordonnées. Quant à $\overline{\psi_L}$, elle est donnée par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&\overline{\psi_L}(a_k) = a_{n+1-k} \text{ pour tout } k \in \{1,\dots,n\},\\
&\overline{\psi_L}(b_k) = b_{n+2-k} \text{ pour tout } k \in \{2,\dots,n\},\\
&\overline{\psi_L}(b_1) = a_{n-1} - (c_n - b_n),\\
&\overline{\psi_L}(c_k) = a_{n+2-k} + b_{n+2-k} + c_{n+1-k} - b_{n+1-k} - a_{n-k}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour tout } k \in \{2,\dots,n-1\},\\
&\overline{\psi_L}(c_n) = a_2 + b_2 - b_1.
\end{aligned}$$

Proposition 14. *Pour tout triplet* $(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) \in \mathbb{Z}^{3n-1}$ *on a :*

$$L(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) = L(\psi_L(\underline{a},\underline{b},\underline{c})) = L(\sigma_L(\underline{a},\underline{b},\underline{c})).$$

Démonstration : On utilise les mêmes changements de variables que dans les preuves des propositions 10 et 11.

Proposition 15. *Notons* χ_L *l'automorphisme de* $\mathbb{Z}^{3n-1}$ *défini par :*

$$\begin{aligned}
&\overline{\chi_L}(a_k) = a_k \textit{ pour tout } k \in \{1,\dots,n-1\},\\
&\overline{\chi_L}(b_k) = b_k \textit{ pour tout } k \in \{1,\dots,n-1\},\\
&\overline{\chi_L}(c_k) = c_k \textit{ pour tout } k \in \{2,\dots,n-1\},\\
&\overline{\chi_L}(a_n) = c_n,\\
&\overline{\chi_L}(b_n) = b_n + a_n - c_n,\\
&\overline{\chi_L}(c_n) = a_n.
\end{aligned}$$

Alors on a, pour tout $(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) \in \mathbb{Z}^{3n-1}$ *qui vérifie les conditions de convergence de la proposition 13 et tel que* c_n *et* $a_n + b_n - c_n$ *soient positifs :*

$$L(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) = \frac{a_n!b_n!}{c_n!(a_n+b_n-c_n)!}L(\chi_L(\underline{a},\underline{b},\underline{c})).$$

Démonstration : Cela provient de la formule

$$\int_0^1 \frac{x_n^{a_n}(1-x_n)^{b_n}}{(1-\delta_{n-1}(\underline{x})x_n)^{c_n+1}}\mathrm{d}x_n = \frac{a_n!b_n!}{c_n!(a_n+b_n-c_n)!}\int_0^1 \frac{x_n^{c_n}(1-x_n)^{a_n+b_n-c_n}}{(1-\delta_{n-1}(\underline{x})x_n)^{a_n+1}}\mathrm{d}x_n$$

en raisonnant comme dans la preuve de la proposition 12.

N.B. En se restreignant aux $(\underline{a},\underline{b},\underline{c})$ tels que $c_2=\cdots=c_{n-1}=0$, on voit que χ_L agit sur les intégrales $I(\underline{a},\underline{b},c)$ de la partie 3. En fait χ_L appartient au groupe G défini au paragraphe 3.3. Quand $n\geq 4$, l'hypothèse $b_n=c$ qui apparaît dans la définition de $\mathcal{E}$ fait que le quotient de factorielles se simplifie, et χ_L agit sur $\mathcal{E}$ comme le changement de variables $\psi\sigma\psi$.

4.3. Action et structure du groupe.

Dans ce paragraphe, on suppose $n\geq 3$. Notons G_L le groupe engendré par σ_L, ψ_L et χ_L. Il agit sur l'ensemble à huit éléments $\{a_n,b_n,c_n,a_n+b_n-c_n,a_1,b_2,a_1+b_1-a_2,a_2+b_2-b_1\}$ comme indiqué sur le diagramme suivant, où $\overline{\psi_L}$ est la symétrie par rapport à la droite verticale :

$$\begin{array}{ccc|cc} c_n & \overset{\overline{\chi_L}}{\longleftrightarrow} & a_n & a_1 & a_2+b_2-b_1 \\ & & & \updownarrow \overline{\sigma_L} & \updownarrow \overline{\sigma_L} \\ a_n+b_n-c_n & \overset{\overline{\chi_L}}{\longleftrightarrow} & b_n & b_2 & a_1+b_1-a_2 \end{array}$$

On a deux carrés : $\{a_n,b_n,c_n,a_n+b_n-c_n\}$ et $\{a_1,b_2,a_1+b_1-a_2,a_2+b_2-b_1\}$. On a alors un homomorphisme surjectif de G_L dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, qui à tout $g\in G_L$ associe 0 si g fixe globalement chacun des deux carrés, et 1 si g les échange. Le noyau de cet homomorphisme est isomorphe à $V\times V$, où $V=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est le groupe de Klein (engendré par les symétries par rapport aux médiatrices d'un carré). L'image de G_L dans $\mathfrak{S}_8$ est donc d'ordre 32, isomorphe à $(V\times V)\rtimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Or l'action de G_L sur cet ensemble à huit éléments est fidèle ; donc G_L est d'ordre 32.

On peut résumer les constructions de ce paragraphe dans l'énoncé suivant :

Théorème 8. *La famille $L(\underline{a},\underline{b},\underline{c})$, paramétrée par $(\underline{a},\underline{b},\underline{c})\in\mathbb{Z}^{3n-1}$, admet un groupe de Rhin-Viola d'ordre 32, isomorphe à $(V\times V)\rtimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, qui est engendré par deux changements de variables σ_L et ψ_L et une transformation hypergéométrique χ_L.*

5. Des intégrales adaptées au développement en série entière

Les intégrales considérées dans cette partie font apparaître au dénominateur des facteurs $1 - y_1 \dots y_k$, et non des δ_k. C'est pourquoi il est plus naturel de les développer en séries multiples. On montre qu'elles admettent un groupe de Rhin-Viola isomorphe à celui du paragraphe 4.3. En outre, au paragraphe 5.5 on exhibe un changement de variables qui relie ces intégrales à celles considérées dans la partie 3 (et même à une famille plus générale, définie au paragraphe 5.5). Comme application, on transforme les intégrales considérées par Beukers, Vasilenko et Vasilyev en intégrales qui se développent naturellement en séries.

Dans cette partie comme dans le reste du texte, on suppose que les exposants sont entiers, même si les résultats se généralisent.

5.1. Définition.

À tout point $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n) \in [0,1]^n$, et à tout entier $k \in \{0, \dots, n\}$, on associe le réel $\alpha_k(\underline{y}) = y_1 y_2 \dots y_k$. De plus, on pose par convention $y_{n+1} = 0$ et $\alpha_{n+1}(\underline{y}) = 0$.

Soient $\underline{A} = (A_1, \dots, A_n)$, $\underline{B} = (B_1, \dots, B_n)$ et $\underline{C} = (C_2, \dots, C_n)$ trois familles d'entiers relatifs.

On note $\bar{\omega}$ la n-forme différentielle sur $[0,1]^n$ définie par :

$$\bar{\omega} = \frac{\mathrm{d}y_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}y_n}{(1 - \alpha_2(\underline{y})) \cdot (1 - \alpha_3(\underline{y})) \cdot \dots \cdot (1 - \alpha_n(\underline{y}))}.$$

On considère les intégrales suivantes, qui sont positives et éventuellement infinies :

$$K(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}) = \int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{k=1}^n y_k^{A_k} (1 - y_k)^{B_k}}{\prod_{k=2}^n (1 - \alpha_k(\underline{y}))^{C_k + 1}} \mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_n.$$

5.2. Convergence.

Dans ce paragraphe, on autorise l'entier n à valoir 1. La condition nécessaire et suffisante de convergence de l'intégrale $K(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})$, dans laquelle on suppose que les exposants sont entiers, est donnée[3] par la proposition suivante :

Proposition 16. *L'intégrale $K(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})$ est convergente si, et seulement si, les A_k et les B_k sont tous positifs ou nuls, et qu'on a :*

$$\sum_{k=2}^{p} C_k \leq \sum_{j=1}^{p} B_j \text{ pour tout } p \in \{2, \dots, n\}.$$

Démonstration : La convergence de l'intégrale résulte des deux lemmes cidessous. Montrons la réciproque, en supposant que les A_k et les B_k sont tous positifs ou nuls, et qu'il existe p tel que $\sum_{k=2}^{p} C_k \geq 1 + \sum_{j=1}^{p} B_j$. Soit $\varepsilon > 0$

[3] Noter l'erreur, à ce propos, dans [6].

assez petit. Restreignons-nous au domaine défini par les inégalités $1-2\varepsilon < y_p < \cdots < y_2 < y_1 < 1-\varepsilon$ et $y_{p+1}, \ldots, y_n \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Sur ce domaine, on a $\varepsilon \leq 1-\alpha_k(\underline{y}) \leq 2n\varepsilon$ et $\frac{1-y_k}{1-\alpha_k(\underline{y})} \geq \frac{1}{k}$ pour tout $k \in \{2, \ldots, p\}$, donc $\frac{(1-y_k)^{B_k}}{(1-\alpha_k(\underline{y}))^{C_k+1}}$ est minoré par $\varepsilon^{-(C_k+1-B_k)}$, à une constante multiplicative près (qui est indépendante de ε). L'intégrale sur ce domaine est donc minorée par un multiple constant de $\varepsilon^{B_1+p-\sum_{k=2}^{p}(C_k+1-B_k)}$, qui ne tend pas vers 0 avec ε. Ceci démontre que l'intégrale $K(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})$ diverge.

Lemme 4. *Supposons que les A_k et les B_k sont tous positifs ou nuls, et qu'on a $\sum_{k=2}^{p} C_k \leq \sum_{j=1}^{p} B_j$ pour tout $p \in \{2, \ldots, n\}$. Notons $\xi_n(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})$ la fonction dont $K(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})$ est l'intégrale contre $\bar{\omega}$:*

$$\xi_n(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})(\underline{y}) = \frac{\prod_{k=1}^{n} y_k^{A_k}(1-y_k)^{B_k}}{\prod_{k=2}^{n}(1-\alpha_k(\underline{y}))^{C_k}}.$$

Alors $\xi_n(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})$ est une fonction bornée sur $[0,1]^n$.

Démonstration : Quitte à remplacer chaque C_k par $C_k - B_k$, pour $k \in \{2, \ldots, n\}$, on peut supposer $B_2 = \cdots = B_n = 0$ (puisque $1-y_k \leq 1-\alpha_k(\underline{y})$ sur $[0,1]^n$). De même, en remplaçant C_2 par $C_2 - B_1$, on se ramène à $B_1 = \cdots = B_n = 0$. On a alors $C_2 \leq 0$, donc l'inégalité $1-\alpha_2(\underline{y}) \leq 1-\alpha_3(\underline{y})$ permet de remplacer C_2 par 0 et C_3 par $C_2 + C_3$, qui est négatif par hypothèse. On peut donc itérer ce processus, pour se ramener au cas où $B_1 = \cdots = B_n = 0$ et $C_2 = \cdots = C_{n-1} = 0$, avec $C_n \leq 0$. Dans ce cas, la fonction ξ_n est évidemment bornée.

Lemme 5. *L'intégrale*

$$K(\underline{0}, \underline{0}, \underline{0}) = \int_{[0,1]^n} \bar{\omega} = \int_{[0,1]^n} \frac{\mathrm{d}y_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y_n}{(1-\alpha_2(\underline{y})) \cdot (1-\alpha_3(\underline{y})) \cdot \cdots \cdot (1-\alpha_n(\underline{y}))}$$

est convergente, et est égale à la série

$$\sum_{\ell_1 \geq \ell_2 \geq \cdots \geq \ell_{n-1} \geq 1} \frac{1}{\ell_1^2 \ell_2 \ell_3 \ldots \ell_{n-1}}.$$

Démonstration : Immédiat par développement en série entière.

5.3. Définition des transformations.

Définissons deux automorphismes σ_K et λ de $\mathbb{Z}^{3n-1}$ de la manière suivante. La permutation $\overline{\sigma_K}$ associée à σ_K (voir le début du paragraphe 3.2) échange A_1 et A_2, ainsi que B_1 et B_2, en fixant les autres composantes. Quant à $\bar{\lambda}$, elle est donnée par les formules suivantes (avec la convention

$C_1 = 0)$:

$$\bar{\lambda}(A_k) = \sum_{j=1}^{n+1-k} B_j - C_j \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, n\},$$
$$\bar{\lambda}(B_1) = A_n,$$
$$\bar{\lambda}(B_k) = B_{n+2-k} \text{ pour tout } k \in \{2, \dots, n\},$$
$$\bar{\lambda}(C_k) = A_{n+2-k} + B_{n+2-k} - A_{n+1-k} \text{ pour tout } k \in \{2, \dots, n\}.$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 17. *Pour tout* $(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}) \in \mathbb{Z}^{3n-1}$ *on a :*

$$K(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}) = K(\sigma_K(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})) = K(\lambda(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})).$$

Démonstration : Pour σ_K il suffit d'appliquer le changement de variables qui échange y_1 et y_2 en fixant les y_k pour $k \geq 3$. Pour λ on applique le changement de variables noté également λ, qui à $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$ associe $\underline{y'} = (y'_1, \dots, y'_n)$ défini (avec la convention $\alpha_{n+1}(\underline{y}) = 0$) par :

$$y'_k = \frac{1 - \alpha_{n+1-k}(\underline{y})}{1 - \alpha_{n+2-k}(\underline{y})}$$

pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. Il vérifie $1 - y'_k = \frac{\alpha_{n+1-k}(\underline{y})(1-y_{n+2-k})}{1-\alpha_{n+2-k}(\underline{y})}$ et $1 - \alpha_k(\underline{y'}) = \alpha_{n+1-k}(\underline{y})$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. Pour voir que λ stabilise (au signe près) la forme différentielle $\bar{\omega}$, il suffit de remarquer que $\mathrm{d}\alpha_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\alpha_n = \alpha_1(\underline{y})\alpha_2(\underline{y}) \dots \alpha_n(\underline{y})\mathrm{d}y_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}y_n$ est fixée, au signe près, par λ. Ceci termine la démonstration de la proposition 17.

N.B. On voit facilement que λ et σ_K sont d'ordre 2, et que leur composée $\lambda\sigma_K$ est d'ordre 4 : le groupe engendré par λ et σ_K est isomorphe au groupe diédral $\mathcal{D}_4$, qui est d'ordre 8. De plus, $\lambda\sigma_K\lambda$ est le changement de variables qui fixe les $n-1$ premières coordonnées et remplace y_n par $\frac{1-y_n}{1-\alpha_n(\underline{y})}$.

Notons χ_K l'automorphisme de $\mathbb{Z}^{3n-1}$ défini par :

$$\overline{\chi_K}(A_k) = A_k \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, n-1\},$$
$$\overline{\chi_K}(B_k) = B_k \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, n-1\},$$
$$\overline{\chi_K}(C_k) = C_k \text{ pour tout } k \in \{2, \dots, n-1\},$$
$$\overline{\chi_K}(A_n) = C_n,$$
$$\overline{\chi_K}(B_n) = A_n + B_n - C_n,$$
$$\overline{\chi_K}(C_n) = A_n.$$

On a alors la proposition suivante, qu'on démontre de manière analogue à la proposition 15 :

Proposition 18. *Pour tout* $(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}) \in \mathbb{Z}^{3n-1}$ *qui vérifie les conditions de convergence de la proposition 16 et tel que* C_n *et* $A_n + B_n - C_n$ *soient positifs on a :*

$$K(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}) = \frac{A_n! B_n!}{C_n!(A_n + B_n - C_n)!} K(\chi_K(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})).$$

5.4. Action et structure du groupe.

Dans ce paragraphe, on suppose $n \geq 3$. Notons G_K le groupe engendré par σ_K, λ et χ_K. Il agit sur l'ensemble à huit éléments $\{A_n, B_n, C_n, A_n + B_n - C_n, B_1, B_2, A_1 + B_1 - A_2, A_2 + B_2 - A_1\}$ comme indiqué dans le diagramme suivant, où λ est la symétrie par rapport à la droite verticale :

$$\begin{array}{ccc|cc}
C_n & \overset{\chi_K}{\longleftrightarrow} & A_n & B_1 & A_2 + B_2 - A_1 \\
 & & & \updownarrow \overline{\sigma_K} & \updownarrow \overline{\sigma_K} \\
A_n + B_n - C_n & \overset{\chi_K}{\longleftrightarrow} & B_n & B_2 & A_1 + B_1 - A_2
\end{array}$$

On a deux carrés : $\{A_n, B_n, C_n, A_n + B_n - C_n\}$ et $\{B_1, B_2, A_1 + B_1 - A_2, A_2 + B_2 - A_1\}$. Considérons l'homomorphisme surjectif de G_K dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui à tout $g \in G_K$ associe 0 si g fixe globalement chacun des deux carrés, et 1 si g les échange. Le noyau de cet homomorphisme est isomorphe à $V \times V$, où V est le groupe de Klein. Comme l'action est fidèle, on voit que G_K est d'ordre 32, isomorphe à $(V \times V) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On peut résumer les constructions de ce paragraphe dans l'énoncé suivant :

Théorème 9. *La famille* $K(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})$, *paramétrée par* $(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}) \in \mathbb{Z}^{3n-1}$, *admet un groupe de Rhin-Viola d'ordre 32, isomorphe à* $(V \times V) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, *qui est engendré par deux changements de variables* σ_K *et* λ *et une transformation hypergéométrique* χ_K.

QUESTION : Ce paragraphe ressemble beaucoup au paragraphe 4.3. Peut-on trouver une explication à cette similitude ?

5.5. Lien avec les intégrales de Vasilyev.

5.5.1. *Définitions.* Dans ce paragraphe, on définit une famille d'intégrales qui contient les $I(\underline{a}, \underline{b}, c)$ de la partie 3 et qui correspond, par un changement de variables, aux intégrales $K(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})$.

À tout point $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$ et à tout entier $k \in \{0, \ldots, n\}$ on associe le réel

$$D_k(\underline{x}) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j x_n x_{n-1} \cdot \cdots \cdot x_{n-j+1}.$$

On a alors $D_0(\underline{x}) = 1$, $D_1(\underline{x}) = 1 - x_n$, $D_2(\underline{x}) = 1 - x_n(1 - x_{n-1})$, $D_n(\underline{x}) = \delta_n(\underline{x})$ et, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned} D_k(\underline{x}) &= \delta_k(x_{n+1-k}, \ldots, x_{n-1}, x_n) \\ &= 1 - x_n(1 - x_{n-1}(1 - \ldots (1 - x_{n+1-k}))). \end{aligned}$$

En outre, on dispose de la relation de récurrence suivante :

$$D_{k+1}(\underline{x}) = D_k(\underline{x}) + (-1)^{k+1} x_n x_{n-1} \cdot \cdots \cdot x_{n-k}.$$

Soient $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ et $\underline{c} = (c_2, \ldots, c_n)$ trois familles d'entiers relatifs. On note $\tilde{\omega}$ la n-forme différentielle sur $[0,1]^n$ définie par :

$$\tilde{\omega} = \frac{\prod_{k \in \{2, \ldots, n-2\} \text{ pair}} D_k(\underline{x})}{\prod_{k \in \{3, \ldots, n-1\} \text{ impair}} D_k(\underline{x})} \frac{\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n}{D_n(\underline{x})}.$$

On considère des intégrales de la forme suivante :

$$J(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = \int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{k=1}^n x_k^{a_k} (1 - x_k)^{b_k}}{\prod_{k=2}^n D_k(\underline{x})^{c_k}} \tilde{\omega}.$$

Les intégrales $J(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ sont une généralisation des intégrales $I(\underline{a}, \underline{b}, c)$ considérées dans la partie 3, puisqu'on a $D_n(\underline{x}) = \delta_n(\underline{x})$.

N.B. Le changement de variables défini par $u_i = \frac{1}{x_{n+1-i}}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ permet de transformer toute intégrale $J(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ en une intégrale de la forme

$$\int_{]1, +\infty[^n} \frac{\prod_{k=1}^n u_k^{\mathfrak{a}_k} (u_k - 1)^{\mathfrak{b}_k}}{\prod_{k=2}^n \delta_k(\underline{u})^{\mathfrak{c}_k}} \mathrm{d}u_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u_n,$$

grâce à la relation $D_k(\underline{x}) = (-1)^k x_n x_{n-1} \cdot \cdots \cdot x_{n+1-k} \delta_k(\underline{u})$ valable pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. Ces intégrales ressemblent à celles de la quatrième partie de ce texte, car elles font intervenir les $\delta_k(\underline{u})$. Mais le domaine d'intégration est différent ; cette remarque ne constitue donc pas une réponse à la question posée à la fin du paragraphe 5.4.

5.5.2. *Énoncé et démonstration du théorème principal.* Ce théorème fait le lien entre les intégrales $J(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ définies ci-dessus et les intégrales $K(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})$ introduites au paragraphe 5.1. On le formule ici avec des exposants entiers, mais il se généralise au cas où les exposants sont complexes.

Théorème 10. *Soit* $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) \in \mathbb{Z}^{3n-1}$. *Définissons* $(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})$ *par les formules suivantes (avec la convention* $a_0 = 0$*) :*

$A_k = a_{n+1-k}$ *pour tout* $k \in \{1, \dots, n\}$,

$B_1 = a_{n-1} + b_n - c_2 - c_3 - \dots - c_n$,

$B_k = b_{n+1-k}$ *pour tout* $k \in \{2, \dots, n\}$,

$C_k = a_{n+1-k} + b_{n+1-k} - c_k - c_{k+1} - \dots - c_n$ *pour tout* $k \in \{2, \dots, n\}$ *pair,*

$C_k = c_k + c_{k+1} + \dots + c_n - a_{n-k}$ *pour tout* $k \in \{3, \dots, n\}$ *impair.*

Alors on a $J(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = K(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})$, *c'est-à-dire :*

$$\int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{k=1}^n x_k^{a_k}(1-x_k)^{b_k}}{\prod_{k=2}^n D_k(\underline{x})^{c_k}} \frac{\prod_{k \in \{2,\dots,n-2\} \text{ pair}} D_k(\underline{x})}{\prod_{k \in \{3,\dots,n-1\} \text{ impair}} D_k(\underline{x})} \frac{\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n}{D_n(\underline{x})}$$
$$= \int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{k=1}^n y_k^{A_k}(1-y_k)^{B_k}}{\prod_{k=2}^n (1-\alpha_k(\underline{y}))^{C_k+1}} \mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_n.$$

Comme les fonctions qu'on intègre sont positives, l'une des intégrales du théorème est finie (i.e. convergente) si, et seulement si, l'autre l'est. En particulier, ce théorème permet (grâce à la proposition 16) d'obtenir les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une intégrale de la forme $J(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ soit convergente.

Ce théorème permet de traduire les hypothèses du théorème de Zudilin cité au paragraphe 3.5, donnant ainsi des conditions suffisantes sur $(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})$ pour que $K(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})$ soit une combinaison linéaire, à coefficients rationnels, de 1 et des $\zeta(j)$ pour j entier, compris entre 2 et n, ayant la même parité que n.

L'application linéaire $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) \mapsto (\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})$ définie dans ce théorème est bijective, et sa réciproque est définie (avec la convention $A_j = B_j = C_j = 0$ pour $j > n$) par :

$a_k = A_{n+1-k}$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$b_k = B_{n+1-k}$ pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$,

$b_n = B_1 + B_2 - C_2$,

$c_k = A_k + B_k - A_{k+2} - C_k - C_{k+1}$ pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$ pair,

$c_k = C_k + C_{k+1} - B_{k+1}$ pour tout $k \in \{3, \dots, n\}$ impair.

Démonstration du théorème 10 : Il suffit d'appliquer le changement de variables défini par les formules suivantes :

$$x_p = y_{n+1-p} \text{ si } p \equiv n \mod 2,$$
$$\text{et } x_p = \frac{(1-\alpha_{n-p}(\underline{y}))y_{n+1-p}}{1-\alpha_{n+1-p}(\underline{y})} \text{ si } p \not\equiv n \mod 2.$$

On a alors :

$$1 - x_p = \frac{1 - y_{n+1-p}}{1 - \alpha_{n+1-p}(\underline{y})} \text{ si } p \not\equiv n \mod 2,$$

$$\text{et } D_p(\underline{x}) = \prod_{j=1}^{p} (1 - \alpha_j(\underline{y}))^{(-1)^{j+1}} \text{ pour tout } p \in \{1, \dots, n\}.$$

La réciproque est donnée par :

$$y_k = \frac{D_{k-2}(\underline{x}) x_{n+1-k}}{D_k(\underline{x})} \text{ pour tout } k \text{ pair,}$$

$$\text{et } y_k = x_{n+1-k} \text{ pour tout } k \text{ impair.}$$

On a alors :

$$1 - y_k = \frac{D_{k-1}(\underline{x})(1 - x_{n+1-k})}{D_k(\underline{x})} \text{ pour tout } k \text{ pair,}$$

$$\text{et } 1 - \alpha_k(\underline{y}) = \left(\frac{D_{k-1}(\underline{x})}{D_k(\underline{x})} \right)^{(-1)^k} \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, n\}.$$

En outre, ce changement de variables transforme $\tilde{\omega}$ en $\bar{\omega}$, au signe près. En effet, on peut montrer par récurrence sur $k \in \{1, \dots, n\}$ la relation suivante :

$$\mathrm{d}x_n \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{n+1-k} = \frac{\prod_{j \in \{1,\dots,k-1\} \text{ impair}} (1 - \alpha_j(\underline{y}))}{\prod_{j \in \{2,\dots,k\} \text{ pair}} (1 - \alpha_j(\underline{y}))^2} \mathrm{d}y_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y_k.$$

Cela termine la démonstration du théorème 10.

5.5.3. *Corollaires.* On obtient comme cas particulier du théorème 10 le résultat suivant :

Corollaire 7. *L'intégrale* $\int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{k=1}^n x_k^N (1-x_k)^N}{\delta_n(x_1,\dots,x_n)^{N+1}} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$ *est égale, pour tout* $N \geq 0$, *à*

$$\int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{k=1}^n y_k^N (1 - y_k)^N}{\prod_{k \in \{2,\dots,n\} \text{ pair}} (1 - y_1 \dots y_k)^{N+1}} \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n$$

si n *est pair, et à*

$$\int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{k=1}^n y_k^N (1 - y_k)^N}{(1 - y_1 \dots y_n)^{N+1} \prod_{k \in \{2,\dots,n\} \text{ pair}} (1 - y_1 \dots y_k)^{N+1}} \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n$$

si n *est impair.*

En particulier, pour $n = 3$, on obtient que les intégrales (3) et (6) de l'introduction coïncident pour tout $N \geq 0$: les preuves de Beukers et de Sorokin de l'irrationalité de $\zeta(3)$ utilisent exactement les mêmes formes linéaires en 1 et $\zeta(3)$.

Quand $N=0$, le corollaire 7 montre que l'intégrale $\int_{[0,1]^n} \frac{\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n}{\delta_n(x_1,\ldots,x_n)}$ est égale à

$$\int_{[0,1]^n} \frac{\mathrm{d}y_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y_n}{(1-\alpha_2(\underline{y}))\cdot(1-\alpha_4(\underline{y}))\cdots(1-\alpha_n(\underline{y}))} \text{ si } n \text{ pair,}$$
$$\int_{[0,1]^n} \frac{\mathrm{d}y_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y_n}{(1-\alpha_2(\underline{y}))\cdot(1-\alpha_4(\underline{y}))\cdots(1-\alpha_{n-1}(\underline{y}))\cdot(1-\alpha_n(\underline{y}))} \text{ si } n \text{ impair.}$$

Sous cette forme, il est facile d'obtenir un développement en série :

$$\sum_{l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_{n/2} \geq 1} \frac{1}{l_1^2 l_2^2 \cdot \cdots \cdot l_{n/2}^2} \text{ si } n \text{ est pair,}$$

et $$\sum_{l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_{(n-1)/2} \geq l_{(n+1)/2} \geq 1} \frac{1}{l_1^2 l_2^2 \cdot \cdots \cdot l_{(n-1)/2}^2 l_{(n+1)/2}} \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Il est alors immédiat d'écrire l'intégrale $\int_{[0,1]^n} \frac{\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n}{\delta_n(x_1,\ldots,x_n)}$ comme combinaison linéaire, sur $\mathbb{Q}$, de polyzêtas de poids au plus n. Or Vasilyev [14] a démontré que cette intégrale vaut $2(-1)^{n-1}\mathrm{Li}_n((-1)^{n-1})$. Pour obtenir une nouvelle preuve de cette égalité, il suffit donc de démontrer une certaine relation linéaire sur $\mathbb{Q}$ entre des polyzêtas ; il existe des outils combinatoires à cet effet (voir par exemple [16]).

En appliquant la proposition 17 au corollaire 7, on obtient des intégrales qui ressemblent à celles utilisées par Sorokin [11] et notées (7) dans l'introduction :

Corollaire 8. *L'intégrale* $\int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{k=1}^n x_k^N (1-x_k)^N}{\delta_n(x_1,\ldots,x_n)^{N+1}} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$ *est aussi égale à*

$$\int_{[0,1]^n} \frac{(y_1y_2)^{r(N+1)-1}(y_3y_4)^{(r-1)(N+1)-1}\cdots(y_{n-1}y_n)^N}{\prod_{k=2}^n (1-y_1\ldots y_k)^{N+1}} \times \prod_{k=1}^n (1-y_k)^N \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n \quad \textit{si } n=2r \textit{ est pair,}$$

$$\int_{[0,1]^n} \frac{y_1^{r(N+1)-1}(y_2y_3)^{r(N+1)-1}(y_4y_5)^{(r-1)(N+1)-1}\cdots(y_{n-1}y_n)^N}{\prod_{k=2}^n (1-y_1\cdots y_k)^{N+1}} \times \prod_{k=1}^n (1-y_k)^N \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n \quad \textit{si } n=2r+1 \textit{ est impair.}$$

6. Conclusion

Un prolongement possible à ce texte serait de chercher d'autres équations des variétés qui sont introduites dans les deux premières parties, pour mieux faire ressortir le parallélisme entre ces deux situations et arriver à une compréhension aussi géométrique que possible du groupe de Rhin-Viola. Concrètement, on peut considérer un autre plongement de ces variétés (par exemple en prenant les $x_i - x_{i+1}$ et les $x_i x_{i+1}$ comme coordonnées pour $\mathcal{V}_3$), ou bien remplacer partout les x_i par leurs carrés. En outre, les automorphismes qui apparaissent dans ce texte sont toujours d'une forme assez particulière (qui permet de faire apparaître des facteurs Γ).

Le corollaire 7 a été obtenu, indépendamment, par Zlobin [17] comme cas particulier d'un résultat général qui écrit n'importe quelle intégrale de la forme $I(\underline{a}, \underline{b}, c)$ comme produit d'un nombre rationnel (qui est un quotient de produits de factorielles) par une intégrale de la forme $K(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})$. En comparant ce résultat général avec notre théorème 10, on devrait pouvoir enrichir la structure de groupe sur les intégrales $I(\underline{a}, \underline{b}, c)$.

Bibliographie

[1] K. M. Ball, T. Rivoal, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs.* Invent. Math. **146** (2001), 193–207.

[2] F. Beukers, *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$. Bull. London Math. Soc. **11** (1979), 268–272.

[3] N. Brisebarre, *Irrationality measures of* $\log(2)$ *and* $\pi/\sqrt{3}$. Experiment. Math. **10** (2001), 35–51.

[4] H. Cartan, *Formes différentielles.* Hermann, 1967.

[5] A. C. Dixon, *On a certain double integral*, Proc. London Math. Soc. (2) **2** (1905), 8–15.

[6] S. Fischler, *Formes linéaires en polyzêtas et intégrales multiples.* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **335** (2002), 1–4.

[7] M. Kontsevich, D. Zagier, *Periods*, in Mathematics Unlimited - 2001 and beyond. Springer (2001), 771–808.

[8] G. Rhin, C. Viola, *On a permutation group related to* $\zeta(2)$. Acta Arith. **77** (1996), 23–56.

[9] G. Rhin, C. Viola, *The group structure for* $\zeta(3)$. Acta Arith. **97** (2001), 269–293.

[10] T. Rivoal, *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs.* C. R. Acad. Sci. Paris I Math. **331** (2000), 267–270.

[11] V. N. Sorokin, *A transcendence measure for* π^2. Mat. Sbornik [Sb. Math.] **187** (1996), 87–120 [1819–1852].

[12] V. N. Sorokin, *Apéry's theorem.* Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. no. 3 [Moscow Univ. Math. Bull. **53**] (1998), 48–53 [48–52].

[13] O. N. Vasilenko, *Certain formulae for values of the Riemann zeta function at integral points*, in Number theory and its applications. Proceedings of the science-theoretical conference, Tashkent (1990), p. 27 (en russe).

[14] D. V. Vasilyev, *Some formulas for Riemann zeta-function at integer points.* Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. no. 1 [Moscow Univ. Math. Bull. **51**] (1996), 81–84 [41–43].

[15] D. V. Vasilyev, *On small linear forms for the values of the Riemann zeta-function at odd integers* (en russe). Doklady NAN Belarusi (Reports of the Belarus National Academy of Sciences) **45** (2001), 36–40.

[16] M. Waldschmidt, *Valeurs zêta multiples : une introduction.* J. Théor. Nombres Bordeaux **12** (2000), 581–595.

[17] S. A. Zlobin, *Integrals expressible as linear forms in generalized polylogarithms.* Mat. Zametki [Math. Notes] **71** (2002), 782–787 [711–716].

[18] W. Zudilin, *Arithmetic of linear forms involving odd zeta values*, à paraître au J. Théor. Nombres Bordeaux.

[19] W. Zudilin, *Well-poised hypergeometric service for diophantine problems of zeta values*, dans ce volume du J. Théor. Nombres Bordeaux.

Stéphane Fischler
Département de Mathématiques et Applications
École Normale Supérieure
45, rue d'Ulm
75230 Paris Cedex 05
France
E-mail : fischler@dma.ens.fr