LM 256 - TD n°10

18 novembre 2011

Les numéros des exercices sont ceux de la feuille n°3.

Exercice 3. a) Notons V_a le domaine d'espace dont on doit calculer le volume, *i.e.*

$$V_a = \{(x, y, z) |\, f(x, y) \leq z \leq 4\},$$

où $f(x, y) = x^2 + y^2$ pour tous x, $y \in \mathbb{R}$, et $f(x, y) \leq 4$ équivaut donc à : (x, y) est dans le disque D du plan Oxy, centré en l'origine et de rayon 2. Autrement dit, V_a est le domaine de l'espace situé au-dessus de ce disque, entre le paraboloïde (d'équation) $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 4$. On a donc :

$$\mathrm{Vol}(V_a) = \int_{(x,y)\in D} \Big(4 - f(x, y)\Big)\, dxdy$$

(noter l'analogie avec le calcul de l'aire d'un domaine du plan situé entre les graphes de deux fonctions d'une variable). En écrivant $D = \{(x, y) |\, x \in [-2, 2], |y| \leq \sqrt{4 - x^2}\}$, on a par Fubini :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(V_a) &= \int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \Big(4 - (x^2 + y^2)\Big)\, dy \\
&= \int_{-2}^{2} \Big[(4 - x^2) - \frac{y^3}{3}\Big]_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= \frac{4}{3} \int_{-2}^{2} (4 - x^2)^{3/2}\, dx
\end{aligned}$$

(c'est dans ce calcul que j'avais fait une faute ; j'avais mis un + devant le y^3). Cette dernière intégrale est un peu délicate à calculer.

Le changement de variable $x = 2\sin\theta$, $\theta \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big]$ donne

$$\mathrm{Vol}(V_a) = \frac{4}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^2\theta)^{3/2} 2\cos\theta\, d\theta = \frac{64}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta.$$

Il faut ensuite linéariser le $\cos^4$: $\cos^4\theta = \frac{1}{8}\cos(4\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit facilement que $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{3\pi}{8}$, et donc : $\mathrm{Vol}(V_a) = 8\pi$.

On pouvait adopter un autre point de vue, et décrire V_a par : $\{(x, y, z)|\, x^2+y^2 \leq z \leq 4\}$, sans passer par le point de vue « graphe de fonction ».

Alors $\mathrm{Vol}(V_a) = \iiint_{V_a} dxdydz = \int_0^4 dz \iint_{\{x^2+y^2\leq z\}} dxdy$ par Fubini. Or pour tout $z \geq 0$, $\iint_{\{x^2+y^2\leq z\}} dxdy$ n'est autre que l'aire d'un disque de rayon $\sqrt{z}$, et vaut donc πz. Ainsi $\mathrm{Vol}(V_a) = \pi \int_0^4 zdz = 8\pi$. Je vous laisse voir laquelle des deux méthodes est la plus efficace...

b) Le domaine, disons V_b, dont on doit calculer l'aire est la réunion, disjointe au disque $\Delta := \{(x, y, z)|\, z = 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ (de volume nul) près, de deux domaines similaires à V_a ; on notera $\cup_\Delta$. Plus précisément, si h est la transformation de l'espace $(x, y, z) \mapsto \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, \frac{1}{4}z\right)$ (qui multiplie donc les volumes par $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$), on a $V_b = \Big(h(V_a) + (0, 0, -1)\Big) \cup_\Delta \Big(-h(V_a) + (0, 0, 1)\Big)$. On en déduit que $\mathrm{Vol}(V_b) = 2\cdot\frac{1}{16}\mathrm{Vol}(V_a) = \pi$.

En procédant à un calcul direct, on avait :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(V_b) &= \int_{-1}^{1} dz \iint_{x^2+y^2\leq\min(z+1,1-z)} dxdy \\
&= \int_{-1}^{0} dz \iint_{x^2+y^2\leq z+1} dxdy + \int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2\leq 1-z} dxdy \\
&=\pi\Big(\int_{-1}^{0}(z+1)dz + \int_0^1 (1-z)dz\Big) = \pi.
\end{aligned}$$

c) On procède comme en b) pour calculer le volume du domaine considéré, que l'on note V_c ; si $k : (x, y, z) \mapsto (x, \frac{1}{2}y, z)$ (qui multiplie les volumes par $\frac{1}{2}$), on a $V_c = k(V_a)$, donc $\mathrm{Vol}(V_c) = \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(V_a) = 4\pi$. Exercice : le démontrer par un calcul direct.

Exercice 4. a) Le domaine V considéré est délimité par un domaine D du plan Oxy, $D = \{x^2 \leq y \leq \sqrt{x},\ (x, y) \in [0, 1]^2\}$, et le graphe d'une fonction (continue) au-dessus de D, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Ainsi $\mathrm{Vol}(V) = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$. Par Fubini, il vient $\mathrm{Vol}(V) = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2) dxdy = \int_0^1 \Big(x^{3/2} - x^4 + \frac{1}{3}(x^{3/2-} x^6)\Big) = \frac{2}{7}$.

b) C'est la même chose, avec $D = \Big\{y^2 - y \leq x \leq y,\ (x, y) \in \left[\frac{1}{4}, 2\right] \times [0, 2]\Big\}$ et $(x, y) \mapsto 3x^2 + y^2$. Ainsi $\mathrm{Vol}(V) = \int_0^2 dy \int_{y^2-y}^{y} (3x^2 + y^2)dx = \int_0^2 (4y^3 - 4y^4 + 3y^5 - y^6)dy = \frac{144}{35}$.

c) Encore pareil, avec $D = \Big\{1 \leq x \leq 7-3y,\ (x,y) \in [1,4]\times[1,2]\Big\}$ et $(x,y) \mapsto 2xy$. On a donc $\mathrm{Vol}(V) = \int_1^2 dy \int_1^{7-3y} 2xy\, dx = \int_1^2 (48y - 42y^2 + 9y^3)dy = \frac{49}{4}$.

d) On prend plutôt le volume compris entre le paraboloïde $z = x^2+y^2+1$ et les plans $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=4$. On peut décrire le domaine comme étant compris entre les graphes de x^2+y^2+1 et $4-(x+y)$, au-dessus du domaine du plan horizontal $D = \{x^2+y^2+x+y \leq 3,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$, soit la partie du disque de centre $\Big(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\Big)$ et de rayon $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ comprise dans le premier quadrant. Le calcul du volume est certainement faisable, mais je ne doute pas qu'il soit fort compliqué.

e) Donnons de V la description suivante : $V = \{0 \leq z \leq 3,\ 0 \leq y \leq \sqrt{9-z^2},\ 0 \leq x \leq 2y\}$. Ainsi par Fubini

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(V) &= \int_0^3 dz \int_0^{\sqrt{9-z^2}} dy \int_0^{2y} dx \\
&= \int_0^3 dz \int_0^{\sqrt{9-z^2}} 2y dy \\
&= \int_0^3 (9-z^2) dz \\
&= 18.
\end{aligned}$$

f) On peut donner de ce domaine, disons V, la description suivante : $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y \in [-2,2], x \text{ et } z \in [-\sqrt{4-y^2}, \sqrt{4-y^2}]\}$. Ce domaine est donc bien borné, et Fubini nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(V) = \iiint_D 1\ dxdydz &= \int_{-2}^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dz \\
&= \int_{-2}^2 dy \left(\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx \right) \cdot \left(\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dz \right) \\
&= \int_{-2}^2 \left(2\sqrt{4-y^2}\right)^2 dy = 8 \int_0^2 \left(4-y^2\right) dy \\
&= 8 \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{128}{3} \approx 42,7,
\end{aligned}$$

où l'on est passé de la première à la deuxième lignes en remarquant que les variables étaient séparées.

Exercice 5. On rappelle que dans le cas homogène, pour une surface S (*resp.* un volume V), le centre de gravité C_S (*resp.* C_V) est le point dont l'abscisse est la moyenne des abscisses des points de S (resp. de V), et de même pour l'ordonnée et la cote. Ce qui se formalise comme suit :

$$x_{C_S} = \frac{1}{\text{Aire}(S)} \int_S x \; dS, \quad y_{C_S} = \frac{1}{\text{Aire}(S)} \int_S y \; dS$$

$$\left(\text{resp. } x_{C_V} = \frac{1}{\text{Vol}(V)} \int_V x \; dV,\ y_{C_V} = \frac{1}{\text{Vol}(V)} \int_V y \; dV,\ z_{C_V} = \frac{1}{\text{Vol}(S)} \int_V z \; dV\right).$$

Dans notre cas, on travaille dans le plan ; il n'y a donc pas de cote à calculer. De plus, par symétrie par rapport à l'axe Oy, on a $x_{C_S} = 0$. Il ne reste donc à calculer que y_{C_S}, et il faut pour cela commencer par $\text{Aire}(S) = \int_S dS = \int_S dxdy$. Par Fubini, puisque $S = \{(x,y), x \in [-1,1], 2x^2 \leq y \leq 1\}$, on écrit $\int_S dxdy = \int_{-1}^1 dx \int_{2x^2}^2 dy = \int_{-1}^1 2(1-x^2)dx = 2\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{8}{3}$.

De même, $\int_S y \; dxdy = \int_{-1}^1 dx \int_{2x^2}^2 y \; dy = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(4-4x^4)dx = 2\left[x - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^1 = \frac{16}{5}$. Donc $y_{C_S} = \frac{3}{8} \cdot \frac{16}{5} = \frac{6}{5}$. Ce résultat conforte bien l'impression que donne un dessin de la situation, puisque l'on y voit qu'il y a un peu plus de masse au dessus de la droite d'équation $\{y = 1\}$, et que donc le centre de masse doit avoir une ordonné légèrement plus grande que 1.