LM 256 - TD n°4 et TDA n°1

30 septembre 2011

Les numéros des exercices sont ceux de la feuille n°1.

Exercice 8. Il s'agit dans cet exercice de faire des compositions de développements limités, technique qui se réduit à un exercice de calcul polynomial assez banal une fois que l'on en a saisi les règles ; voici les résultats qu'il fallait obtenir :

1. Remarquons qu'il suffit ici d'écrire les $DL_3(0)$ de $\log(1+x)$ avant de le mettre au carré pour obtenir $\log(1+x)^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o_0(x^4)$.

2. En composant les $DL_3(0)$ du sinus et de l'exponentielle, on avait : $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^3)$ (attention, ici le coefficient de x^3 dans le développement limité est nul).

4. Ce développement est plus délicat, car *a priori* il ne correspond à rien de connu. Analysons rapidement la situation. On sait que le dénominateur est d'ordre 2 ; on se doute donc que l'on va pouvoir factoriser par x^2 numérateur et dénominateur pour se ramener à quelque chose de plus familier. Or simplifier par x^2 signifie perdre deux ordres dans les o, et comme il nous faut des $o(x^3)$, on commencera par des développements à l'ordre 5 (car $2+3=5$, je ne vous apprends rien).

Commençons par $\ln(\cos x)$; on a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^5) = 1 + h(x)$, avec donc h de la taille de x^2 au voisinage de 0. Ainsi $\ln(\cos x) = \ln\big(1 + h(x)\big) = h(x) - \frac{1}{2}h(x)^2 + O_0\big(h(x)^3\big)$ (on peut s'arrêter là car un $O_0\big(h(x)^3\big)$ est un $O_0(x^6)$, donc en particulier un $o_0(x^5)$). Ensuite, $h(x)^2 = \frac{x^4}{4} + o_0(x^5)$ (on le voit très facilement en mettant x^2 en facteur dans $h(x)$), d'où :

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + o_0(x^5) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o_0(x^5) = -\frac{x^2}{2}(1 + \frac{x^2}{6} + o_0(x^3))$$

Passons au dénominateur de j. On a $\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^5) = -\frac{x^2}{2}\big(1 - \frac{x^2}{12} + o_0(x^3)\big)$. En simplifiant les $-\frac{x^2}{2}$, on a donc

$$j(x) = \frac{1 + \frac{x^2}{6} + o_0(x^3)}{1 - \frac{x^2}{12} + o_0(x^3)} = \big(1 + \frac{x^2}{6} + o_0(x^3)\big)\big(1 + \frac{x^2}{12} + o_0(x^3)\big) = 1 + \frac{1}{4}x^2 + o_0(x^3).$$

5. Cette fois on écrit $x = 1+h$, et alors $\sqrt{x} = \sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 + o_0(h^3)$, ce qui s'écrit en fonction de x : $\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o_1\big((x-1)^3\big)$.

Exercice 9. *On se permettra dans cet exercice un peu technique l'abus consistant à identifier une fonction et la formule la définissant, qui peut se justifier en disant que x n'est pas une variable, mais la fonction $t \mapsto t$. Pour un rappel sur l'intégration des fractions rationnelles, voir en fin de corrigé.*

1. La décomposition en éléments simples (on procède rapidement par identification) de la première fonction s'écrit

$$\frac{1}{5}\Big(\frac{-4}{x+1}+\frac{4x+1}{x^2+4}\Big) ;$$

cette fonction admet donc $\frac{-4}{5}\log|x+1|+\frac{2}{5}\log(x^2+4)+\frac{1}{10}\arctan(x/2)+k_\pm$ pour primitives sur $I_- =]-\infty,-1[$ et $I_+ =]-1,+\infty[$, $k_\pm$ étant une constante fixée sur $I_\pm$.

Pour la seconde fonction, on remarque qu'elle est de la forme $\frac{1}{2}u'\sqrt{u}=\frac{1}{2}u'u^{\frac{1}{2}}$, avec $u=x^2+1$. Une primitive bien connue de $v'v^\alpha$ étant $\frac{1}{\alpha+1}v^{\alpha+1}$ pour toute v strictement positive et C^1 et tout $\alpha \neq -1$, on en déduit que les primitives recherchées sont les $\frac{1}{3}\big(x^2+1\big)^{\frac{3}{2}}+k$, $k\in\mathbb{R}$.

Pour la troisième fonction, il faut juste faire attention aux singularités (elle devient infinie en les multiples impairs de $\frac{\pi}{4}$), et on va donc calculer des primitives séparément sur chaque $I_k := \big]\frac{(2k-1)\pi}{4},\frac{(2k+1)\pi}{4}\big[$, $k\in\mathbb{Z}$. Fixons k ; sur I_k notre fonction s'écrit $\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}$, soit encore $-\frac{1}{2}\frac{u'}{u}$, si l'on pose $u=\cos(2x)$, et admet donc pour primitives les $-\frac{1}{2}\ln|\cos(2x)|+c_k$ (ne pas oublier la valeur absolue !), la constante c_k pouvant être modifiée arbitrairement selon k.

2. La première fonction peut intimider, mais on remarque que le dénominateur a pour discriminant $-73<0$, et donc la décomposition en éléments simples est déjà faite, et le dénominateur est toujours >0. De plus, le numérateur n'est autre que la dérivée du dénominateur ; on a juste à calculer les primitives d'une fonction du type $\frac{u'}{u}$ avec $u>0$, qui sont les $\ln u$+constante. Les primitives demandées sont donc les $\ln\big(3x^2-7x+11\big)+k$, $k\in\mathbb{R}$.

La seconde fonction s'écrit $-\frac{1}{2}\frac{u'}{u^2}$ si l'on pose $u=1+\cos(2x)$, ce qui est ≥ 0, mais s'annule précisément en les multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$. Comme ci-dessus, on donne donc les primitives sur chaque $I_k := \big]\frac{(2k-1)\pi}{2},\frac{(2k+1)\pi}{2}\big[$, $k\in\mathbb{Z}$, qui s'écrivent $\frac{1}{2(1+\cos(2x))}+c_k$, $c_k\in\mathbb{R}$.

La troisième quand vous aurez rendu votre DM.

3. Contrairement aux apparences, la réduction en éléments simples de la première fonction reste à effectuer, pour la raison que x^4+16 n'est pas irréductible ; en effet, on a $x^4+16=\big(x+2e^{i\pi/4}\big)\big(x+2e^{3i\pi/4}\big)\big(x+2e^{-i\pi/4}\big)\big(x+2e^{-3i\pi/4}\big)$, soit en regroupant les termes conjugués, $x^4+16=\big(x^2+2\sqrt{2}x+4\big)\big(x^2-2\sqrt{2}x+4\big)$. Les deux trinômes apparaissant sont cette fois irréductibles, ayant pour discriminant -8 (comme je l'ai esquissé, c'est beaucoup plus rapide avec les complexes qu'en procédant par identification ; entraînez-vous à décomposer x^6-27 pour voir si vous maîtrisez ces idées).. Après identification,

la réduction en éléments simples de notre fonction donne

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\Big(\frac{1}{x^2+2\sqrt{2}x+4}-\frac{1}{x^2-2\sqrt{2}x+4}\Big)$$

Oublions provisoirement le coefficient $\frac{1}{4\sqrt{2}}$, et écrivons $\frac{1}{x^2+2\sqrt{2}x+4}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+(1+x/\sqrt{2})^2}$, dont une primitive est donnée par $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\big(1+x/\sqrt{2}\big)$. En procédant de même pour le second morceau, on parvient aux primitives recherchées, qui sont les $\frac{1}{8}\big(\arctan\big(1+x/\sqrt{2}\big)-\arctan\big(x/\sqrt{2}-1\big)\big)+k,\ k\in\mathbb{R}$.

Pour la deuxième fonction (qui est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ tout entier), on commence par un peu de trigonométrie ; on utilise en particulier la formule $\sin(2x)=2\sin x\cos x$. Ainsi, en posant $u=1+\cos^2 x>0$, on voit que notre fonction s'écrit $-\frac{u'}{\sqrt{u}}$, dont une primitive est $-\ln(u)$. Les primitives demandées sont donc les $-\ln\big(1+\cos^2 x\big)+k,\ k\in\mathbb{R}$.

Enfin, la troisième fonction (définie sur $]e^{-1},+\infty[$) s'écrit $u'\sqrt{u}=u'u^{1/2}$, en posant $u=1+\ln x$. Ses primitives sont donc les $\frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2}+k,\ k\in\mathbb{R}$.

4. Pour la première fonction, une « intégration par parties formelle » donne

$$\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=(x-1)e^x.$$

Les primitives de xe^x sont donc les $(x-1)e^x+k,\ k\in\mathbb{R}$.

On applique cette méthode à la deuxième :

$$\int x\sin x\,dx=-x\cos x-\int(-\cos x)dx=-x\cos x+\sin x$$

et les primitives recherchées sont respectivement les $-x\cos x+\sin x+k$.

Pour la primitive de ln, à vous de jouer !

On peut encore procéder ainsi pour la quatrième fonction (définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, voire sur $\mathbb{R}^+$ si $n\geq 1$ et que l'on prolonge par continuité en 0), mais on peut aussi employer une méthode plus directe. Celle-ci consiste à « deviner » une primitive approchée, puis à la corriger pour obtenir une vraie primitive. Sur cet exemple, on essaie, $x^{n+1}\ln x$, dont la dérivée vaut $(n+1)x^n\ln x+x^n$. Or x^n est la dérivée de $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$, et donc $x^{n+1}\ln x-\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ a pour dérivée $(n+1)x^n\ln x$. On en déduit que les primitives voulues sont les $\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x-\frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}+k,\ k\in\mathbb{R}$.

Pour la cinquième fonction, on commence par calculer une primitive de $\cos^2 x=\frac{1+\cos(2x)}{2}$, ce qui donne $v=\frac{x}{2}+\frac{\sin(2x)}{4}$. On écrit ensuite

$$\int x\cos^2 x\,dx=xv-\int v=\frac{x^2}{2}+\frac{x\sin(2x)}{4}-\frac{x^2}{4}+\frac{\cos(2x)}{8}=\frac{x^2}{4}+\frac{x\sin(2x)}{4}+\frac{\cos(2x)}{8}.$$

Il ne reste qu'à ajouter une constante pour avoir toutes les primitives voulues.

Pour la dernière fonction, on essaie $x\ln(x^2+1)$; cette fonction a pour dérivée $\ln(x^2+1)+\frac{2x^2}{x^2+1}$. Il s'agit de corriger le dernier terme, qui peut encore s'écrire $2-\frac{2}{x^2+1}$. On obtient donc facilement que les primitives demandées sont les $x\ln(x^2+1)+2(x-\arctan x)+k$, $k\in\mathbb{R}$.

5. Pour trouver les primitives de $\sin^3 x$, on remarque que $\sin^3 x = \sin x\cdot\sin^2 x = \sin x - \sin x\cos^2 x$. Les primitives sont donc facilement les $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + k$, $k\in\mathbb{R}$.

On raisonne de même pour $\tan^3 x$, en faisant attention aux singularités aux multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$. Sur un intervalle $I_k = \left]\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right[$, $k\in\mathbb{Z}$, on écrit

$$\tan^3 x = \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x} - \frac{\sin x}{\cos x}.$$

En intégrant terme à terme, il vient que les primitives de la fonction considérée sur I_k sont les $\frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\cos x| + c_k$, $c_k\in\mathbb{R}$, et ce pour tout $k\in\mathbb{Z}$.

Passons à la dernière fonction, définie sur $]-2,0[\cup]0,2[$. Toujours suivant la méthode de l'intégration par parties formelles, on a

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \int \frac{2x}{x\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \int \frac{1}{\sqrt{1-(x/2)^2}}\,dx.$$

Les primitives recherchées sont donc les $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \arcsin x + c_\pm$, $c_\pm\in\mathbb{R}$ selon que l'on se place sur $]-2,0[$ (c_-) ou sur $]0,2[$ (c_+).

Un rappel sur l'intégration d'une fraction rationnelle : si l'on a $F(X) = \frac{A(X)}{Q(X)}$, avec $\deg A \geq \deg Q$, on effectue la division euclidienne de A par Q (on écrit $A = EQ+P$) et $F = E + \frac{P}{Q}$, avec $\deg P < \deg Q$.

Maintenant, Q se décompose en $a\prod_{i=1}^n (X-a_i)^{p_i}\prod_{k=1}^m (X^2+b_kX+c_k)^{q_k}$, avec les a_i deux à deux distincts, et les $\Delta_k = {b_k}^2/4 - c_k < 0$.

Le théorème de décomposition en éléments simples (à connaître ! vous le trouverez certainement dans vos cours de l'an passé, ou dans n'importe quel ouvrage généraliste de mathématiques de L1) nous dit alors que l'on peut écrire :

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{p_i}\frac{\alpha_{ij}}{a(X-a_i)^j} + \sum_{k=1}^m\sum_{l=1}^{q_k}\frac{\beta_{kl}X+\gamma_{kl}}{a(X^2+b_kX+c_k)^l}.$$

(méditez l'écriture des numérateur ; ils sont toujours de degré strictement inférieur aux dénominateurs associés, sans tenir compte de l'exposant).

Ensuite, on intègre terme à terme la somme obtenue :

- les $\frac{\alpha_{i1}}{x-a_i}$ s'intègrent en $\alpha_{i1}\log(|x-a_i|)$ à gauche et à droite strictement de a_i, tandis que les $\frac{\alpha_{ij}}{(X-a_i)^j}$ pour $j\geq 2$ s'intègrent en $\frac{-\alpha_{ij}}{(j-1)(X-a_i)^{j-1}}$;
- pour les $\frac{\beta_{kl}X+\gamma_{kl}}{(X^2+b_kX+c_k)^l}$, on écrit d'abord $\frac{\beta_{kl}X+\gamma_{kl}}{(X^2+b_kX+c_k)^l} = \beta_{kl}\frac{X+b_k/2}{(X^2+b_kX+c_k)^l} + (\gamma_{kl} - \beta_{kl}b_k/2)\frac{1}{(X^2+b_kX+c_k)^l}$;
- ensuite, les $\frac{x+b_k/2}{x^2+b_kx+c_k}$ s'intègrent en $\frac{1}{2}\log(x^2+b_kx+c_k)$, tandis que pour $l\geq 2$, les $\frac{x+b_k/2}{(x^2+b_kx+c_k)^l}$ s'intègrent en $-\frac{X+b_k/2}{2(l-1)(X^2+b_kX+c_k)^{l-1}}$;

- d'autre part, les $\frac{1}{x^2+b_kx+c_k} = \frac{1}{(x+b_k/2)^2+c_k-{b_k}^2/4} = \frac{-1/\Delta_k}{(x/\delta_k+b_k/(2\delta_k))^2+1}$ si l'on note δ_k une racine carrée de $-\Delta_k$ s'intègrent en $\arctan(x/\delta_k + b_k/(2\delta_k))/\delta_k$;
- enfin, pour les $\frac{1}{(x^2+b_kx+c_k)^l} = \frac{(-1/\Delta_k)^l}{((x/\delta_k+b_k/(2\delta_k))^2+1)^l}$ pour $l \geq 2$, on utilise des intégrations par parties successives et on se ramène au cas $l = 1$. Par exemple,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} &= \int \frac{(1+x^2)dx}{(1+x^2)^2} - \int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int x\frac{2x}{(1+x^2)^2}dx \\ &= \arctan - \frac{1}{2}\left(x \cdot \frac{-1}{1+x^2} - \int \frac{-dx}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\arctan + \frac{x}{2(1+x^2)}\end{aligned}$$

(et il est toujours bon si l'on a le temps de vérifier que l'on ne s'est pas trompé en redérivant ce qu'on obtient). Rassurez-vous, dans la pratique, on ne vous demandera pas les choses les plus compliquées que permet de faire ce théorème.

Exercice 15. *En général, cet exercice n'est pas sans soulever quelques doutes. Il est pourtant représentatif de ce genre de problèmes.*

1. Pour commencer, f est sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ un quotient de deux polynômes en x, y, avec un dénominateur ne s'annulant jamais ; elle est donc continue en tant que quotient à dénominateur qui ne s'annule pas de fonctions continues. Étudions la situation en $(0,0)$; vu comme la question est posée, on se doute qu'il va falloir montrer que f *n'est pas* continue en $(0,0)$, et pour ce faire trouver un « chemin » tel que si l'on s'approche de $(0,0)$ en suivant ce chemin, les valeurs que va prendre f (restreinte à ce chemin) ne tendent pas vers la valeur voulue, soit $f(0,0)$, qui vaut 0.

Or, au vu de la formule qui définit f, les variables x et y jouent un rôle symétrique ; on peut donc regarder ce qui se passe lorsque l'on fait $x = y$, c'est-à-dire quand on regarde f restreinte à la droite $y = x$ privée de l'origine, ou encore ce que vaut $f(x,x)$ pour $x \neq 0$. Or, pour de tels x, $f(x,x) = 1/2$, ce qui tend vers $1/2 \neq 0 = f(0,0)$ quand (x,x) tend vers $(0,0)$, *i.e.* quand x tend vers 0. On a donc trouvé une manière de se rapprocher arbitrairement près de $(0,0)$ sans que les valeurs prises par f ne tendent vers $f(0,0)$: f n'est donc pas continue en $(0,0)$.

2. Commençons par le calcul sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, puisque f y est sans problème dérivable (quotient de fonctions dérivables à dénominateur > 0) ; après calcul, pour $(x,y) \neq (0,0)$ on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, et en permutant x et y (rôle symétrique), $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$. Regardons maintenant ce qui se passe en $(0,0)$; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'est autre, si elle existe, que la dérivée en $x = 0$ de la fonction $f(\cdot,0) : x \mapsto f(x,0)$. Or pour $x \neq 0$, $f(x,0) = 0$, ce qui est vrai pour $x = 0$, et donc puisque $f(\cdot,0)$ est constante, elle est dérivable (en 0), de dérivée 0. D'où : $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe, et vaut 0. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Exercice 16. 1. La fonction f est sans problème définie en dehors de l'axe des abscisses $y = 0$. Montrons qu'elle admet une limite en $(0,0)$; il s'agit donc de montrer que dès que l'on est assez près de l'origine, de quelque manière que ce soit, on f prend une valeur proche de la limite escomptée. On utilise pour cela la majoration : pour tout h, on a

$|1-\cos h| \leq h^2$. Si l'on remplace h par xy et que l'on divise par y^2, on a pour tout (x,y) hors de l'axe des abscisses

$$|f(x,y)| \leq \frac{x^2y^2}{2y^2} = \frac{x^2}{2},$$

ce qui tend 0 vers lorsque $(x,y) \to (0,0)$, puisque en particulier x tend vers 0. Ainsi, f a pour limite 0 en $(0,0)$.

2. La fonction f est définie en dehors de l'axe des ordonnées $x=0$. On va voir qu'elle n'a pas de limite en l'origine, en s'approchant de ce point de deux manières différentes pour obtenir deux hypothétiques limites différentes. Si l'on suit la première bissectrice, on a, pour tout $x \neq 0$, $f(x,x) = \frac{x^2+x^2}{x} = \frac{1}{2}x$ ce qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Si l'on suit l'arc de parabole $y=\sqrt{x}$, $x>0$, on a pour tout x strictement positif $f(x,\sqrt{x}) = \frac{x^2+x}{x} = x+1$, ce qui tend vers 1 lorsque x tend vers 0. Ainsi, en se rapprochant de $(0,0)$, selon que l'on suive la première bissectrice ou l'arc de parabole ci-dessus, f tend vers 0 ou 1, et ne saurait donc avoir de limite en $(0,0)$.

3. La fonction est définie en dehors de l'origine. On utilise la majoration $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ (à retenir !) valable pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a donc, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, $|f(x,y)| \leq \frac{|x|(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)} = \frac{|x|}{2}$, ce qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0, donc en particulier lorsque (x,y) tend vers l'origine, On a prouvé que f a pour limite 0 en l'origine.

5. Le domaine de définition D_f de f est donné par les contraintes $xy>-1$ (ce qui correspond à la région située strictement entre les deux branches de l'hyperbole $xy=-1$, *cf.* exercice 12 question 3 pour un problème analogue), et $x \neq 0$: il faut donc enlever l'axe des ordonnées de la partie du plan mise en évidence (on pourrait rajouter les $\left(\frac{1}{k}, kl\right)$, $k \in \mathbb{Z}^*$, $l \in -1-\mathbb{N}$ $(k>0)$ ou $l \in -2-\mathbb{N}$ $(k<0)$, mais ce n'est pas le but de l'exercice). Pour $(x,y) \in D_f$, on a $f(x,y) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+xy)}$. Or pour tout (x,y) proche de l'origine (de sorte que $|xy|<1$), $\ln(1+xy) = O(xy)$, donc $\frac{1}{x}\ln(1+xy) = O(y)$ si de plus $x \neq 0$. Puisque un $O(y)$ tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$, et que l'exponentielle est continue, on en déduit que $f(x,y)$ tend vers $e^0 = 1$ lorsque (x,y) tend vers l'origine (dans D_f).