LM256 **Examen - Décembre 2010**

2h, documents et calculatrices interdits. Le soin apporté à la rédaction sera un élément important de la notation.

Question de cours. Ennoncer les formules Stokes et d'Ostrogradsky en précisant les notations utilisées.

Exercice I.

1. Calculer l'intégrale curviligne du champ $\mathbf{V} = (2xy + y^2 - 1, 2xy + x^2)$ le long du segment de $A = (1, 0)$ vers $B = (0, 1)$.

2. Déterminer si $\mathbf{V}$ est un champ gradient et dans ce cas trouver f tel que

$$\mathbf{V} = \nabla f.$$

3.Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$ le long de la curbe parametrée

$$\gamma(t) = (\cos^5 t, \sin^4 t),$$

pour $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Exercice II. On considère l'ensemble défini par

$$D = \left\{ \ (x, y) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{4} \ \right\}.$$

1. Calculer

$$\int\int_D \cos(x^2 + y^2) dxdy \quad .$$

2. Soit l'ensemble

$$V = \left\{ \ (x, y, z) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{4}, \ 0 \leq z \leq \cos(x^2 + y^2) \ \right\}.$$

Tracer un dessin de V et calculer son volume

Exercice III. Soit D le domaine de $\mathbf{R}^3$ limité par les surfaces d'équations

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0, \quad x + z = 1.$$

1.Soit C l'intersection de $x^2 + y^2 = 1$ et $x + z = 1$. Faire un dessin de C et de D.

2. En utilisant les coordonnées cylindriques, calculer le volume de D.

Notons S le bord de D orienté suivant le vecteur normal extérieur. Notons S_1 la partie de S contenue la surface $x + z = 1$ et S_2 la partie contenue dans la surface $z = 0$. Soit $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteurs de composantes $(P, Q, R) = (y - z, z - x, x - y)$.

3. Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers S_1.
4. Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers S_2.
5. Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers S en utilisant la formule d'Ostrogradsky.
6. Calculer l'aire de S_1.
7. Calculer la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de la courbe C, orientée dans le sens trigonométrique, vue d'en haut.

Exercice IV. Calculer l'intégrale

$$\iint_S yz\,dy \wedge dz + xz\,dz \wedge dx + xz\,dx \wedge dy$$

sur la surface S définie par le tetraèdre dans $\mathbf{R}^3$ dont les sommets sont

$$(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1).$$

On considère la surface orientée avec la normale vers l'exterieur de la surface.

LM 256 - Corrigé de l'examen du 7 janvier 2011.

Question de cours : je vous renvoie au poly, théorèmes 5.5.3 p.78, et 5.6.2 p.79.

Exercice I : 1- il fallait comprendre "la circulation du champ V". Cela dit, on paramètre le segment par $x(t) = 1-t$, $y(t) = t$, t allant de 0 à 1.

Ainsi, on doit calculer :

$$\int_0^1 V(x(t), y(t)) \cdot d\vec{r}(t) = \int_0^1 \left(2(1-t)t + t^2 - 1,\ 2(1-t)t + t^2\right) \cdot (-1, 1)\, dt$$

$$= \int_0^1 dt$$

$$= 1.$$

2- V est défini sur $\mathbb{R}^2$ qui est simplement connexe, et ses composantes, disons $P : (x,y) \mapsto 2xy + y^2 - 1$ et $Q : (x,y) \mapsto 2xy + x^2$, admettent des dérivées partielles C^0 (ce sont des polynômes) ; en fait, on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2x + 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

et donc V est un champ de gradients sur $\mathbb{R}^2$.

Soit f un potentiel pour V ; alors

$\frac{\partial f}{\partial x} = P = 2xy + y^2 - 1$, donc il existe une fonction régulière $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f = yx^2 + y^2x - x + g(y) \quad (*).$$

Dérivons $(*)$ par rapport à y ; il vient :

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy + g'(y)$; or, $\frac{\partial f}{\partial y} = Q = 2xy + x^2$,

donc $g'(y) = 0$, i.e. g est constante.

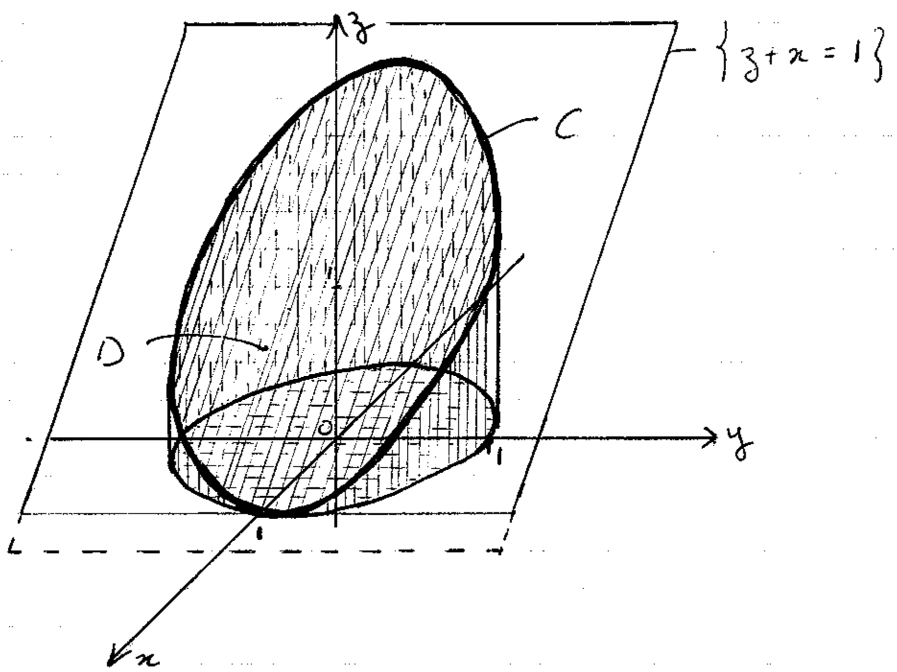
Finalement, f s'écrit $yx^2 + y^2x - x + k$ pour n'importe quelle $k \in \mathbb{R}$.

(On pouvait aussi mener directement ces calculs, et justifier a posteriori l'existence d'un potentiel pour V en remarquant que $\nabla f = V$).

3 - Notons que $\gamma(\pi/2) = (0,1) =: B$ et $\gamma(\pi) = (-1,0) =: C$. La circulation d'un champ gradient ne dépendant que des extrémités de la courbe sur laquelle elle est calculée, on a ici :

$$\int_\Gamma V \cdot dr = f(C) - f(B) = f(-1,0) - f(1,0)$$
$$= -(-1) + k - (0+k)$$
$$= 1 .$$

<u>Exercice III</u>. 1- D'après ses équations, C est l'intersection du cylindre vertical de base le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 du plan horizontal (Oxy) avec le plan d'équation $\{z+x=1\}$. D est le domaine délimité par les surfaces hachurées sur le dessin.



2. Une autre manière de décrire D est de dire que c'est l'ensemble situé du plan (Oxy) et sous le graphe de

$$f : \Delta \to \mathbb{R} \qquad , \text{avec } \Delta \subset (Oxy) \text{ le disque unité.}$$
$$(x,y) \mapsto 1-x$$

Ainsi, $\mathrm{Vol}(D) = \iint_\Delta f = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} (1 - r\cos\theta)\, r\, dr\, d\theta$

$$= \int_0^1 r\,dr \int_0^{2\pi} (1 - r\cos\theta)\, d\theta \quad \text{par Fubini}$$

$$= \int_0^1 r\,dr \; \underbrace{\left[\theta - r\sin\theta\right]_0^{2\pi}}_{=2\pi}$$

$$= 2\pi \int_0^1 r\,dr$$

$$\boxed{\mathrm{Vol}(D) = \pi}.$$

3- Sur le dessin, S_1 est la surface avec les hachures obliques (i.e. S_1 est délimité par C). C'est donc la partie du plan $\{z + x = 1\}$ au-dessus de Δ ; on la paramètre par :

$$x(r,\theta) = r\cos\theta, \quad y(r,\theta) = r\sin\theta, \quad z(r,\theta) = 1 - r\cos\theta.$$

De la sorte, $X_r := \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r}\right) = (\cos\theta, \sin\theta, -\cos\theta)$

et $X_\theta := \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta}\right) = (-r\sin\theta, r\cos\theta, r\sin\theta)$

et donc le flux F_1 de $\vec{V}$ à travers S_1 orientée vers le haut est l'intégrale sur $(r,\theta) \in [0,1]\times[0,2\pi]$

de $[X_r, X_\theta, V] = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 1 - r(\sin\theta + \cos\theta) \\ \sin\theta & r\cos\theta & 1 - 2r\cos\theta \\ -\cos\theta & r\sin\theta & r(\cos\theta - \sin\theta) \end{vmatrix}$

$$= 1 - r(\sin\theta + \cos\theta)\underbrace{\begin{vmatrix} \sin\theta & r\cos\theta \\ -\cos\theta & r\sin\theta \end{vmatrix}}_{=r}$$

$$- (1 - 2r\cos\theta)\underbrace{\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ -\cos\theta & r\sin\theta \end{vmatrix}}_{=0}$$

$$+ r(\cos\theta - \sin\theta)\underbrace{\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}}_{=r}$$

$$= r - r^2(\sin\theta + \cancel{\cos\theta}) + r^2(\cancel{\cos\theta} - \sin\theta)$$

$$\underline{[X_r, X_\theta, V] = r(1 - 2r\sin\theta).}$$

soit : $F_1 = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} r(1 - 2r\sin\theta)\, dr\, d\theta$

$$= \int_0^1 r\,dr \int_0^{2\pi} (1 - 2r\sin\theta)\, d\theta \quad \text{par Fubini}$$

$$= \int_0^1 r\,dr \; \underbrace{\left[\theta + 2r\cos\theta\right]_0^{2\pi}}_{=2\pi}$$

$$\boxed{F_1 = 2\pi \int_0^1 r\,dr = \pi}.$$

4- S_2 est le disque Δ, orienté vers le bas.

On le paramètre par

$x(r,\theta) = r\cos\theta$, $y(r,\theta) = r\sin\theta$, $z = 0$, $(r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$

Le flux F_2 à calculer vaut (-1) fois l'intégrale sur $(r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$ de (mêmes notations) :

$$[X_r, X_\theta, V] = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta & -r\cos\theta \\ 0 & 0 & r(\cos\theta - \sin\theta) \end{vmatrix}$$

$$= r(\cos\theta - \sin\theta) \underbrace{\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}}_{=r}$$

$$= r^2(\cos\theta - \sin\theta),$$

soit : $F_2 = -\iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} r^2(\cos\theta - \sin\theta)\,dr\,d\theta$

$$= -\left(\int_0^1 r^2\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} (\cos\theta - \sin\theta)\,d\theta\right) \text{ par Fubini,}$$

et comme $\int_0^{2\pi} (\cos\theta - \sin\theta)\,d\theta = 0$, $\boxed{F_2 = 0}$.

5- D'après Ostrogradsky ($\vec{V}$ est bien défini sur un voisinage de D), le flux F de $\vec{V}$ à travers S vaut :

$$F = \iiint_D \operatorname{div}(\vec{V}).$$

Or, $\operatorname{div}(\vec{V}) = \frac{\partial}{\partial x}(y-z) + \frac{\partial}{\partial y}(z-x) + \frac{\partial}{\partial z}(x-y) = 0$,

d'où : $\boxed{F = 0}$.

6- Avec les notations du 3., l'aire de S_1 est l'intégrale sur $(r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$ de $\|X_r \wedge X_\theta\|$.

Or $X_r \wedge X_\theta = (r, 0, r)$ donc $\|X_r \wedge X_\theta\| = (r^2 + r^2)^{1/2} = \sqrt{2}\,r$

et $\text{Aire}(S_1) = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta = \sqrt{2} \times$ (Aire d'un disque de rayon 1)

$$\boxed{\text{Aire}(S_1) = \sqrt{2}\,\pi}$$

7- D'après Stokes, la circulation de $\vec{V}$ le long de C orientée comme dans l'énoncé est égale au flux de

$\vec{\mathrm{rot}}\vec{V}$ à travers S, orientée vers le haut.

Calculons $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{V})$:

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{V})_1 = \frac{\partial(V_3)}{\partial y} - \frac{\partial(V_2)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(x-y) - \frac{\partial}{\partial z}(z-x) = -2,$$

et par symétrie, $\underline{\vec{\mathrm{rot}}(\vec{V}) = (-2,-2,-2)}$.

Ainsi, avec les notations de 3., la circulation c demandée est l'intégrale sur $(r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$ de

$$[X_r, X_\theta, \vec{\mathrm{rot}}(\vec{v})] = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & -2 \\ \sin\theta & r\cos\theta & -2 \\ -\cos\theta & r\sin\theta & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \underbrace{\begin{vmatrix} \sin\theta & r\cos\theta \\ -\cos\theta & r\sin\theta \end{vmatrix}}_{=r} + 2 \underbrace{\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ -\cos\theta & r\sin\theta \end{vmatrix}}_{=0} - 2 \underbrace{\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}}_{=r}$$

$$\underline{= -4r}$$

d'où : $$c = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} -4r \, dr \, d\theta = (-4) \times (\text{aire de } \Delta)$$

$$\boxed{c = -4\pi}$$

Exercice 4 : Notons T l'intérieur du tétraèdre et α la forme à intégrer sur $S = \partial T$, de sorte que l'on doive calculer $\iint_{\partial T} \alpha := I$

D'après Stokes, ceci vaut $\iiint_T d\alpha$.

Or, $$d\alpha = \overbrace{\frac{\partial}{\partial x}(yz)}^{=0} dx \wedge dy \wedge dz + \overbrace{\frac{\partial}{\partial y}(xz)}^{=0} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial}{\partial z}(xz) \, dz \wedge dx \wedge dy$$

$$= x \, dz \wedge dx \wedge dy = -x \, dx \wedge dz \wedge dy$$

$$\underline{d\alpha = x \, dx \wedge dy \wedge dz}.$$

On décrit T par $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [0,1],\ y \in [0,1-x],\ z \in [0,1-x-y]\}$,

De cette manière, par Fubini

$$I = \int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy$$

$$= \int_0^1 x \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(x(1-x) - x^2(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{(1-x)^3}{6} \right]_0^1$$

5. $$\boxed{I = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{12}}.$$

Examen LM 256 . Exercice II (Corrigé)

D n'est autre que le disque centré en $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{\pi/4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. On calcule l'intégrale avec les coordonnées polaires :

$$\iint_D \cos(x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_{[0,\frac{\sqrt{\pi}}{2}]\times[0,2\pi]} \cos(r^2)\, r\,dr\,d\theta$$

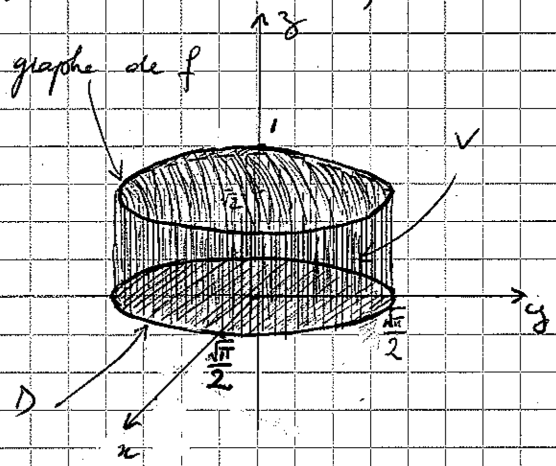
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\pi}/2} r\cos(r^2)\,dr \quad \text{par Fubini}$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{1}{2}\sin(r^2)\right]_0^{\sqrt{\pi}/2}$$

$$= \pi \cdot \sin(\pi/4)$$

$$\boxed{\iint_D \cos(x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{\pi}{\sqrt{2}}}.$$

2- Dessin de V, ensemble délimité par D et le graphe de $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto \cos(x^2+y^2)$.



Pour ce type d'ensembles (délimités entre un domaine D du plan et le graphe d'une fonction f définie sur ce domaine), on a vu que le volume valait $\iint_D f$,

donc ici, $\boxed{vol(V) = \iint_D \cos(x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{\pi}{\sqrt{2}}}$, par 1.